Н. М. МАТВЕЕВ

Дифференциальные уравнения

Н. М. МАТВЕЕВ · ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Н. М. МАТВЕЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Утверждено Министерством высшего и среднего
специального образования РСФСР в качестве
учебного пособия для университетов*

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета*

Книга является учебно-методическим пособием по общему курсу дифференциальных уравнений для студентов-заочников государственных университетов. Она может быть также использована в педагогических институтах, технических высших учебных заведениях и лицами, самостоятельно изучающими теорию дифференциальных уравнений.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является учебно-методическим пособием по общему курсу дифференциальных уравнений для студентов-заочников государственных университетов. Она может быть также использована в педагогических институтах, технических высших учебных заведениях и лицами, самостоятельно изучающими теорию дифференциальных уравнений.

Основная цель книги — организация всего учебного процесса студента-заочника. Книга должна компенсировать ему отсутствие лекций и практических занятий и облегчить использование основной и дополнительной литературы. Проработав активно весь материал, содержащийся в «Методических указаниях», с привлечением учебника и решив все указанные задачи, студент-заочник приобретет требуемые знания по теории и навыки в решении примеров и задач.

В результате проработки настоящей книги студент-заочник подготовится к изучению других дисциплин, в которых используются дифференциальные уравнения. Вместе с тем он получит представление об основных задачах общей теории дифференциальных уравнений и подготовится к изучению специальных курсов.

Это учебно-методическое пособие является самостоятельным единым руководством по изучению основных вопросов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и методов интегрирования, вследствие чего оно может быть использовано лицами, самостоятельно изучающими теорию дифференциальных уравнений.

Книга состоит из восьми глав. Наиболее важными из них являются глава пятая, содержащая теоремы существования, и главы шестая и седьмая, посвященные линейным уравнениям и системам линейных уравнений. В каждой главе, наряду с указанием содержания соответствующей части курса и литературы, имеются развернутые методические указания (включающие в себя конспективное изложение теории с указаниями наиболее важных вопросов и пояснениями наиболее трудных мест, примеры, иллюстрирующие и дополняющие теорию, некоторые дополнительные вопросы и ссылки на литературу) и задачи для самостоятельного решения.

Все определяемые понятия и формулировки теорем выделены курсивом. Для логического ударения используется разрядка.

Книга составлена на основании опыта преподавания курса дифференциальных уравнений на заочном отделении математико-механического факультета Ленинградского государственного университета.

При составлении книги использована следующая литература:

Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин. Сборник задач по высшей математике, т. II. М.—Л., Физматгиз, 1963.

Н. М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд. «Высшая школа», 1963.

Н. М. Матвеев. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Росвузиздат, 1962.

И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1952.

Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1961.

В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 2. М., Физматгиз, 1962.

В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

А. Ф. Филиппов, Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения (Методические указания). Изд. ЛГУ, 1960.

Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения. М., Гостехиздат, 1957.

При ссылках на эти книги указывается только фамилия автора, причем ссылки на книги Н. М. Матвеева делаются соответственно так: Матвеев. Методы интегрирования; Матвеев. Сборник задач.

Студенты-заочники изучают курс дифференциальных уравнений в течение двух семестров, прорабатывая в первом из них главы I—V, во втором — остальные. Каждый семестр представляются по две контрольные работы (после изучения материала, содержащегося соответственно в главах I—II, III—V, VI, VII—VIII). Примерные темы контрольных работ содержатся в конце этой книги. Затем сдается зачет, состоящий из аудиторной контрольной работы и собеседования. Для подготовки к зачету рекомендуется использовать «Вопросы и задачи для повторения», помещенные в книге: Н. М. Матвеев. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. После этого проводится коллоквиум по основным вопросам теории, и студенты сдают экзамен по всему курсу.

В качестве основного руководства по теории дифференциальных уравнений рекомендуется или книга Н. М. Матвеева «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений», или книга В. В. Степанова «Курс дифференциальных уравнений», или книга Л. Э. Эльсгольца «Дифференциальные уравнения». Задачи составлены по книге Н. М. Матвеева «Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям».

В качестве дополнительной литературы я настоятельно рекомендую учебники: И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» и Л. С. Понтрягина «Обыкновенные дифференциальные уравнения», а также книгу А. Ф. Филиппова «Сборник задач по дифференциальным уравнениям» (М., Физматгиз, 1961) (особенно задачи, отмеченные звездочкой), книгу К. К. Пономарева «Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач (М., Учпедгиз, 1962) и книгу Э. Камке «Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (М., Физматгиз, 1961).

Эта книга органически связана с двумя другими книгами того же автора: «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений» и «Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям».

При подготовке второго издания часть материала теоретического характера перенесена в третье издание книги «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений».

Убедительно прошу всех читателей сообщить в адрес издательства обо всех замеченных недостатках настоящей книги.

Н. М. Матвеев

ВВЕДЕНИЕ

1. Понятие о дифференциальном уравнении. *Дифференциальным уравнением* называется равенство, содержащее независимые переменные, искомую функцию и ее производные. При этом независимые переменные всегда предполагаются вещественными, а рассматриваемые функции (если не оговорено противное) — вещественными и однозначными.* Порядок старшей производной, входящей в состав уравнения, называется *порядком* уравнения. Если независимая переменная только одна, то уравнение называется *обыкновенным*. В противном случае оно называется *уравнением с частными производными*. В теории дифференциальных уравнений изучаются также системы дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения имеют многочисленные и самые разнообразные приложения в других разделах высшей математики (например, в математической физике, вариационном исчислении и дифференциальной геометрии), в механике, физике, астрономии и других естественных науках. Современное развитие техники также немыслимо без использования дифференциальных уравнений.

Примеры.

1. Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0 \tag{1}$$

есть обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка. Здесь y — искомая функция от независимой переменной x; $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ — производные от y по x, а F — заданная функция от своих аргументов. Если F есть полином относительно

---

* Дифференциальные уравнения с комплексными значениями независимых переменных и их функций изучаются в *аналитической теории дифференциальных уравнений*.

y', y'', ..., $y^{(n)}$, то наивысшая степень старшей производной называется *степенью* уравнения.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривают главным образом уравнения, разрешенные относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Если при этом функция f зависит от y, y', ..., $y^{(n-1)}$ линейно, то уравнение (2) можно переписать в виде

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + \\ + p_n(x) y = f(x). \tag{3}$$

Такое уравнение называется *линейным*. Линейные уравнения обладают рядом замечательных свойств, благодаря которым теория линейных уравнений является наиболее развитым (и вместе с тем основным) разделом теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Совокупность уравнений

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — искомые функции от x, называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений*. Система уравнений, разрешенная относительно производных от искомых функций,

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array}\right\} \tag{5}$$

называется *нормальной системой* дифференциальных уравнений.

Нормальная система вида

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = p_{11}(x) y_1 + \ldots + p_{1n}(x) y_n + f_1(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = p_{n1}(x) y_1 + \ldots + p_{nn}(x) y_n + f_n(x) \end{array}\right\} \tag{6}$$

называется *линейной*. Теория линейных систем составляет важнейшую часть теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Уравнение вида

$$\Phi\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{7}$$

где u — искомая функция от $x_1, \ldots, x_n$; $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ — частные производные от u по $x_1, \ldots, x_n$, а Φ — заданная функция от своих аргументов, является уравнением с частными производными первого порядка.

4. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{8}$$

где u — искомая функция от x и (времени) t, является уравнением с частными производными второго порядка. Такие уравнения изучаются в курсе математической физики.

2. Понятие о решении дифференциального уравнения. Основная задача интегрирования дифференциального уравнения. *Решением* дифференциального уравнения (обыкновенного или с частными производными) называется функция, имеющая непрерывные производные до порядка, равного порядку уравнения, и обращающая это уравнение в тождество. *Решением* системы дифференциальных уравнений (4) называется совокупность n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, имеющих непрерывные производные* и обращающих все уравнения этой системы в тождества. Кривая, соответствующая решению обыкновенного дифференциального уравнения (или системы обыкновенных дифференциальных уравнений), называется *интегральной кривой* этого уравнения (или системы уравнений). Решению $z = z(x, y)$ дифференциального уравнения с частными производными

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{9}$$

соответствует некоторая поверхность в пространстве (x, y, z). Эта поверхность называется *интегральной поверхностью* уравнения (9). Согласно сделанному предположению относительно непрерывной дифференцируемости решений все рассматриваемые интегральные кривые и интегральные поверхности считаются гладкими.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения. В теории дифференциальных уравнений изучаются методы интегрирования дифференциальных уравнений. Основная задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

* Такие функции называются *непрерывно дифференцируемыми*.

Примеры.

1. Уравнение

$$y' = 2x \tag{10}$$

имеет семейство решений

$$y = x^2 + C, \tag{11}$$

где *C — произвольная постоянная*, которая в данном случае может принимать всевозможные числовые значения. Например, решениями будут

$$y = x^2 (C = 0);\ y = x^2 + 1\ (C = 1);\ y = x^2 - 1\ (C = -1) \text{ и т. д.} \tag{12}$$

Все решения уравнения (10) содержатся в формуле (11). Интегральными кривыми уравнения (10) являются параболы (рис. 1). В этом примере все решения представляют собой элементарные функции.

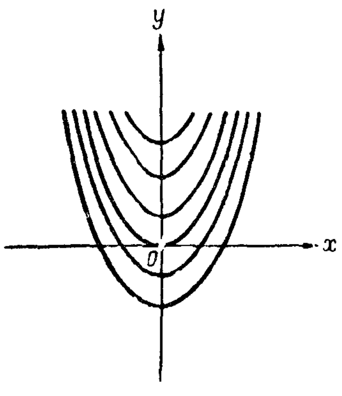

Рис. 1.

2. Все решения уравнения

$$y' = \frac{\sin x}{x} \tag{13}$$

содержатся в формуле

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C. \tag{14}$$

Здесь решения не являются элементарными функциями. Но они выражаются через неопределенный интеграл от функции, входящей в данное уравнение. В подобных случаях говорят, что *уравнение проинтегрировано в квадратурах.* *

Будем говорить, что *уравнение интегрируемо в конечном виде*, если оно интегрируемо в элементарных функциях или в квадратурах.

3. Уравнение

$$y' = x^2 + y^2 \tag{15}$$

не интегрируется в конечном виде (см. ниже, гл. I, п. **19**, пример 1).

4. Все решения уравнения

$$y^{(n)} = 0 \tag{16}$$

содержатся в формуле

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n, \tag{17}$$

* *Квадратурой* называется операция взятия неопределенного интеграла.

где $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Заметим, что число произвольных постоянных, входящих в семейство решений (17), равно порядку уравнения (16).

5. По данному семейству функций (кривых), зависящему от n произвольных постоянных, можно при известных условиях составить дифференциальное уравнение, для которого последние будут решениями (интегральными кривыми). Для этого нужно продифференцировать уравнение семейства n раз по x и исключить из него и полученных n уравнений произвольные постоянные. Полученное уравнение называется *дифференциальным уравнением данного семейства*. Оно выражает собой общее свойство функций (кривых) семейства.

6. Уравнение с частными производными

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{18}$$

имеет решение

$$z=x^2+y^2. \tag{19}$$

Действительно, заменяя в этом уравнении z на x^2+y^2, получаем тождество: $y\cdot 2x-x\cdot 2y\equiv 0$. Решением уравнения (18) будет также

$$z=F(x^2+y^2), \tag{20}$$

где $F(u)$ $(u=x^2+y^2)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от u (почему?). Можно показать, что все решения уравнения (18) содержатся в формуле (20). Например, решение (19) получается при $F(u)=u$. Интегральными поверхностями уравнения (18), соответствующими решениям (20), являются поверхности вращения с осью вращения Oz (почему?).

3. Задача Коши. В теории дифференциальных уравнений и для ее приложений исключительно большое значение имеет задача, в которой ищется решение

$$y=y(x) \tag{21}$$

дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее дополнительным условиям, состоящим в том, что решение (21) должно принимать вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка заданные числовые значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ при заданном числовом значении x_0 независимой переменной x:

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x=x_0. \tag{22}$$

Такая задача называется задачей *Коши*, или *начальной задачей*, условия (22) — *начальными условиями*, а числа $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — *начальными данными* решения (21).

В случае $n=1$ начальные условия имеют вид

$$y=y_0 \quad \text{при} \quad x=x_0. \tag{23}$$

Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой (21), проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2).

Задача Коши распространяется на систему обыкновенных дифференциальных уравнений и на уравнения с частными производными.

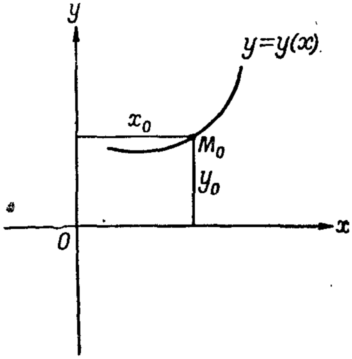

Рис. 2.

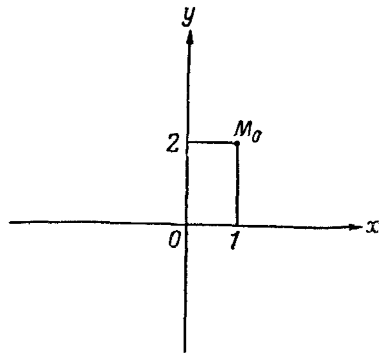

Рис. 3.

Для системы (4) *задача Коши* состоит в нахождении решения

$$y_1=y_1(x), \quad y_2=y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n=y_n(x), \tag{24}$$

для которого

$$y_1=y_1^{(0)}, \; y_2=y_2^{(0)}, \; \ldots, \; y_n=y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x=x_0, \tag{25}$$

где x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $\ldots$, $y_n^{(0)}$ — заданные числа. Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой (24), проходящей через заданную точку $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$.

В задаче Коши для уравнения (9) ищется решение

$$z=z(x, y), \tag{26}$$

удовлетворяющее *начальным условиям*:

$$z=\varphi(y) \quad \text{при} \quad x=x_0, \tag{27}$$

где x_0 — заданное число, а $\varphi(y)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция. Геометрически здесь ищется интегральная поверхность (26), проходящая через заданную кривую $z=\varphi(y)$, $x=x_0$, лежащую в плоскости $x=x_0$.

В теории дифференциальных уравнений устанавливаются достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши, изучаются свойства решений задачи Коши и указываются способы фактического решения ее, в том числе способы приближенного решения.

Как сами дифференциальные уравнения, так и задача Коши допускают соответствующие механические истолкования, обусловливающие многочисленные приложения дифференциальных уравнений к решению задач механики.

Примеры.

1. Найти решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=2 \text{ при } x=1, \tag{28}$$

т. е. найти интегральную кривую уравнения (10), проходящую через точку M_0 (1, 2) (рис. 3).

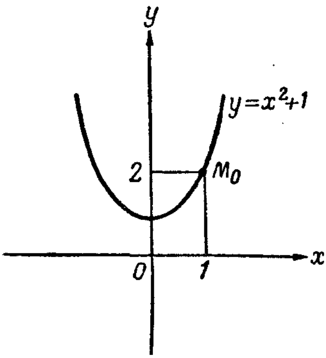

Рис. 4.

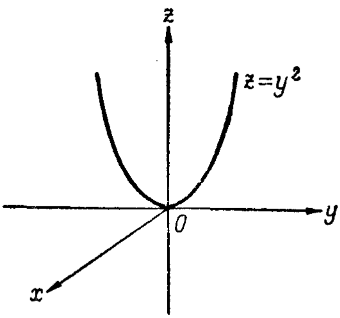

Рис. 5.

Заменяя в формуле (11), содержащей все решения уравнения (10), переменные x и y их начальными значениями 1 и 2, имеем: $2=1+C$, откуда $C=1$. Подставляя найденное значение C в формулу (11), получим:

$$y=x^2+1. \tag{29}$$

Эта парабола (рис. 4) и есть искомое решение. Оно единственно.

2. Найти решение уравнения (18), удовлетворяющее начальным условиям:

$$z=y^2 \text{ при } x=0, \tag{30}$$

или, что то же, найти интегральную поверхность уравнения (18), проходящую через параболу $z=y^2$, $x=0$, лежащую в плоскости $x=0$ (рис. 5).

Искомым решением будет функция (19). Геометрически ему соответствует параболоид вращения (рис. 6) с осью вращения Oz.

4. Понятие о краевой задаче. Наряду с задачей Коши большое значение имеет задача, где дополнительные условия, которым должно удовлетворять искомое решение уравнения (1) при $n \geqslant 2$, задаются не в одной точке, как в случае задачи Коши, а на концах некоторого интервала и ищется решение, определенное внутри этого интервала. Такая задача называется *краевой* или *граничной* задачей.

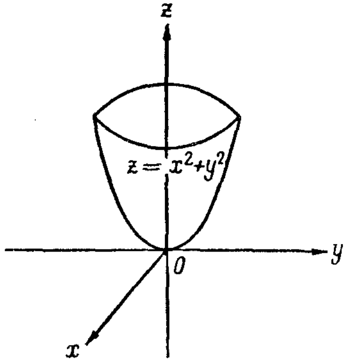

Рис. 6.

В простейшем случае для уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{31}$$

краевые условия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 \text{ при } x = x_0, \\ y &= y_1 \text{ при } x = x_1. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Геометрически здесь речь идет о нахождении интегральной кривой

$$y = y(x), \tag{33}$$

соединяющей две заданные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$.

Пример. Решением уравнения

$$y'' + y = 0, \tag{34}$$

удовлетворяющим краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 \text{ при } x = 0, \\ y &= 0 \text{ при } x = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

будет (рис. 7)

$$y = \cos x \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{36}$$

5. Распределение основного материала по главам. В настоящей книге материал расположен следующим образом. Главы I—IV содержат основные понятия и определения и элементарные методы интегрирования, относящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и системам обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. Проработка этих глав, имея самостоятельное значение, подготавливает студента к усвоению материала главы V, которая содержит доказательство основных теорем существования и изучение общих свойств решений по свойствам функций, входящих в состав уравнений независимо от их интегрируемости в конечном виде. В последующих VI—VII главах рассматриваются общая теория и методы интегрирования линейных уравнений высшего порядка и систем линейных уравнений. При этом существенно используются общие теоремы существования и единственности. Глава VIII содержит вопросы, относящиеся к уравнениям с частными производными первого порядка и непосредственно примыкающие к теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

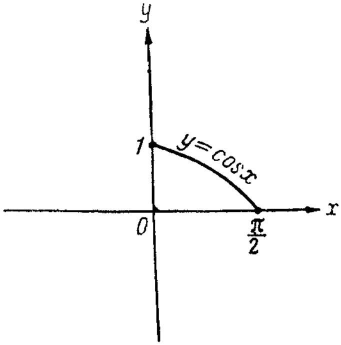

Рис. 7.

В результате изучения курса дифференциальных уравнений студент должен:

1) усвоить основные понятия и определения;

2) отчетливо знать формулировки и доказательства основных теорем существования и единственности, уметь применять их к конкретным дифференциальным уравнениям;

3) владеть общей теорией линейных уравнений и линейных систем и методами нахождения их решений;

4) усвоить элементарные методы интегрирования и приобрести навыки как в решении примеров (в которых требуется найти все решения данного уравнения, решить задачу Коши или краевую задачу и изучить свойства найденных решений), так и в решении задач на составление дифференциальных уравнений;

5) уметь интегрировать простейшие уравнения с частными производными первого порядка и решать задачу Коши;

6) иметь представление об основных задачах и важнейших проблемах общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

ГЛАВА I

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Различные формы записи уравнения и задания его решений. **2**. Геометрическое истолкование уравнения и его решений. **3**. Механическое истолкование уравнения и его решений. **4**. Задача Коши. **5**. Достаточное условие существования решения задачи Коши. **6**. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши. **7**. Общее решение, общее решение в форме Коши, общий интеграл, общее решение в параметрической форме. **8**. Частное решение. **9**. Особое решение. **10**. Понятие об интеграле.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

11. Уравнение, не содержащее искомой функции. **12**. Уравнение, не содержащее независимой переменной. **13**. Уравнение с разделяющимися переменными. **14**. Однородное уравнение. **15**. Обобщенное однородное уравнение. **16**. Линейное уравнение. **17**. Уравнение Бернулли. **18**. Уравнение Дарбу. **19**. Уравнение Риккати. **20**. Уравнение в полных дифференциалах. **21**. Интегрирующий множитель.

§ 3. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования. Введение, гл. I, пп. **1—43. 46—65.**

Степанов, гл. I, § 1 (до второго абзаца стр. 14), §§ 2, 3 (до стр. 32), § 4 (исключая примечания 1 и 2), § 6; гл. II, § 1 [стр. 57—58, 68 (п. 5)], § 3; гл. III, § 4 (стр. 120—123).

Эльсгольц. Введение, гл. I, §§ 1—5, § 6 [стр. 28—29, 35—38 (теоремы II и III)].

Дополнительная

Степанов, гл. I, § 3 (п. 3), § 4 (прим. 1), § 6 (начиная с примечания); гл. III, § 4 (последний абзац на стр. 123 и стр. 124).
Петровский, гл. I—II.
Понтрягин, гл. I, §§ 1—2.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ*

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — заданная функция своих аргументов, которую мы предполагаем однозначной и непрерывной в рассматриваемой области. Эту форму записи уравнения будем называть *нормальной*.

Простейшим из уравнений в нормальной форме и вместе с тем простейшим дифференциальным уравнением первого порядка является

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{2}$$

Решением уравнения (1) в интервале (a, b)** называется функция $y=y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в этом интервале и обращающая уравнение (1) в тождество

$$y'(x)\equiv f[x, y(x)]\,(a<x<b). \tag{3}$$

Если существует такое число c, что

$$f(x, c)\equiv 0 \quad (a<x<b),$$

то уравнение (1), очевидно, имеет решение

$$y=c\,(a<x<b).$$

---

* Номера пунктов в Методических указаниях совпадают с номерами пунктов Содержания.

** Аналогично определяется решение в интервалах $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, а также в интервалах, бесконечных в одну или обе стороны.

Наряду с уравнением (1) всегда следует рассматривать так называемое *перевернутое уравнение*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{1'}$$

используя его в окрестности тех точек плоскости (x, y), в которых функция $f(x, y)$ обращается в бесконечность. Совокупность этих точек мы будем присоединять к области определения уравнения (1), а решения $x = x(y)$ уравнения (1′) присоединять к решениям уравнения (1).

Если $f(x, y)$ не обращается в рассматриваемой области в бесконечность, то уравнения (1) и (1′) равносильны в этой области, т. е. имеют в ней одни и те же решения.

Уравнение

$$dy - f(x, y)\,dx = 0 \tag{4}$$

равносильно уравнениям (1) и (1′).

Уравнение более общего вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{5}$$

равносильно уравнениям

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}; \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}. \tag{6}$$

В точках (x_0, y_0), где $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$, ни одно из последних уравнений не задано: их правые части обращаются в неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Будем считать, что и уравнение (5) не задано в этих точках. Относительно функций M и N будем предполагать, что они непрерывны в рассматриваемой области.

Уравнение

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} \tag{7}$$

называется *уравнением в симметрической форме.*

Из указанных форм записи уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, важнейшими являются формы (1) и (5). Заметим, что в уравнении (1) искомой функцией считается y, в уравнении (1′) — x, а в уравнения (4), (5) и (7) переменные x и y входят равноправно.

Решая вопрос об интегрируемости данного уравнения в конечном виде, нужно использовать различные формы записи уравнения, рассматривая в качестве искомой функции как y, так и x.

Решение дифференциального уравнения (1) может быть задано не только явно: $y=y(x)$, но и в неявном виде (т. е. в виде, не разрешенном относительно y):

$$\Phi(x, y)=0. \tag{8}$$

Иногда решение получают также в параметрической форме:

$$x=x(t), \ y=y(t) \quad (\alpha < t < \beta). \tag{9}$$

Пример 1. Функция

$$y=\sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1) \tag{10}$$

является решением уравнения

$$y'=-\frac{x}{y}. \tag{11}$$

Это же решение можно задать в неявном виде

$$x^2+y^2=1 \quad (y>0) \tag{12}$$

и в параметрической форме

$$x=\cos t, \ y=\sin t \ (0 < t < \pi). \tag{13}$$

Пример 2. Интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{14}$$

являются полупрямые, выходящие из начала координат

$$\left.\begin{aligned} y&=kx \ (x\neq 0),\\ x&=0 \ \ (y\neq 0).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

2. Дифференциальное уравнение (1) вместе с перевернутым уравнением (1′) задает на плоскости (x, y) так называемое *поле направлений*, если через каждую точку (x, y) (рис. 8), в которой задано уравнение (1), провести отрезок, образующий с осью Ox угол α, где $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$, и если считать, что в точках, где $f(x, y)$ обращается в бесконечность, направление поля параллельно оси Oy. Интегральная кривая $y=y(x)$ $[x=x(y)]$ обладает тем свойством, что в каждой ее точке (рис. 9) направление касательной совпадает с направлением поля в этой точке.

Если правая часть уравнения (1) обращается в точке (x_0, y_0) в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то будем говорить, что в этой точке поле не определено. Это не исключает существования интегральных кривых $y=y(x)$ $[x=x(y)]$, *примыкающих* к точке (x_0, y_0), т. е. обладающих свойством $y(x)\to y_0$ при $x\to x_0$ $[x(y)\to x_0$ при $y\to y_0]$. Относительно существования и направлений касательных к этим интегральным кривым в такой точке (x_0, y_0) в общем случае ничего заранее сказать нельзя.

В силу сделанного предположения относительно непрерывности $f(x, y)$ поле направлений, определяемое уравнением (1), тоже непрерывно, т. е. в достаточно близких точках направления поля отличаются сколь угодно мало. Так как $f(x, y)$ однозначна, то интегральные кривые не могут пересекаться, но касание их не исключено. Изломов интегральные кривые иметь не могут.

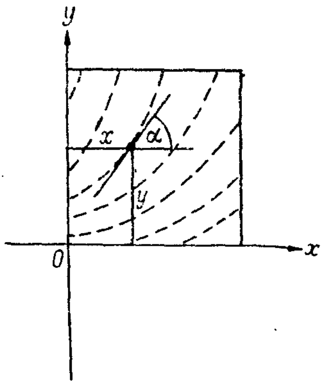

Рис. 8.

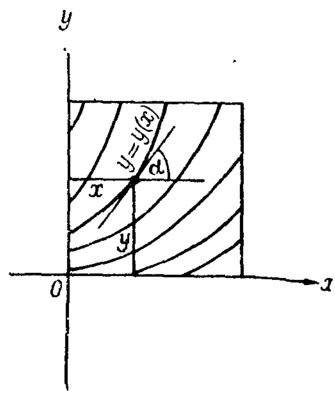

Рис. 9.

Линия, в точках которой направление поля одно и то же, называется *изоклиной* дифференциального уравнения. Изоклинами являются линии, определяемые уравнениями

$$f(x, y) = k \quad (k = \text{const}) \text{ и } \frac{1}{f(x, y)} = 0. \tag{16}$$

Касательные к интегральным кривым в точках изоклин $f = 0$, $f = \infty$, $f = 1$ и $f = -1$ образуют с положительным направлением оси Ox соответственно углы $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ и $-\frac{\pi}{4}$. Изоклина может быть одновременно и интегральной кривой.

Пример 1. Изоклинами уравнений

$$y' = x^2 + y^2; \quad y' = 2x; \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad y' = \frac{1}{2y}; \quad y' = \frac{y}{x^2}; \quad y' = \frac{y}{x} \tag{17}$$

соответственно будут

$x^2 + y^2 = k$ $(k > 0)$, при $k = 0$ изоклина вырождается в точку $x = 0$, $y = 0$;

$$\begin{aligned} &x = a; \quad x = a \quad (|a| < 1); \quad y = b; \quad y = kx^2 \quad (x \neq 0). \\ &x = 0 \ (y \neq 0); \quad y = kx \quad (x \neq 0); \quad x = 0 \quad (y \neq 0). \end{aligned} \tag{18}$$

Линия, каждая точка которой является точкой экстремума или точкой перегиба, проходящей через нее интегральной кривой, называется соответственно *линией экстремумов* или *линией точек перегиба.*

Пример 2. Для уравнения $y' = 2x$ линией экстремумов, а именно линией минимумов, будет $x = 0$ (ось Oy) (см. рис. 1) (y' обращается в нуль при $x = 0$ и меняет знак с минуса на плюс). Все интегральные кривые вогнуты вверх ($y'' > 0$), так что линий точек перегиба нет.

Пример 3. Уравнение $y' = 3x^2$ не имеет линий экстремумов, ибо все решения возрастают при всех x (y' не меняет знака). Линией точек перегиба будет $x = 0$ (рис. 10) (y'' обращается в нуль при $x = 0$ и меняет знак).

Построив достаточно „густое" семейство изоклин данного дифференциального уравнения, можно получить некоторое представление о семействе интегральных кривых. Это представление будет более полным, если определить области возрастания и убывания интегральных кривых, изучить направление вогнутости и построить линии экстремумов и линии точек перегиба [Эльсгольц, стр. 11, пример 4].

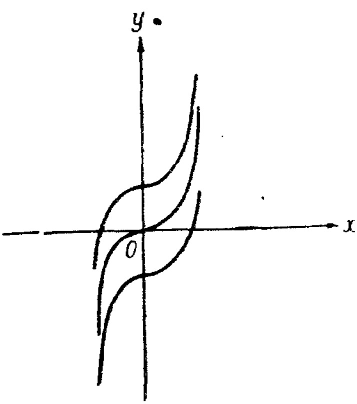

Рис. 10.

3. Пусть точка M движется по оси Ox, причем скорость движения есть известная функция от времени t и положения точки M, которое определяется одной координатой x. Обозначив эту функцию через $f(t, x)$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{19}$$

Всякое решение $x = x(t)$ выражает собой вполне определенный закон движения точки M. Мы будем называть решение $x = x(t)$ *движением*, определяемым уравнением (19).

В случае, когда существует такое число x_0, что

$$f(t, x_0) = 0$$

при всех рассматриваемых значениях времени t, то уравнение (19) имеет решение

$$x \equiv x_0.$$

Движение, соответствующее этому решению, называется *состоянием покоя.*

Если скорость движения зависит только от t или только от x, то получаются более простые дифференциальные уравнения движения точки M:

$$\frac{dx}{dt}=f(t);\quad \frac{dx}{dt}=f(x). \tag{20}$$

4. Задача нахождения решения $y=y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0, \tag{21}$$

где x_0 и y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши* или *начальной задачей.*

Задача Коши имеет простое геометрическое и механическое истолкования. Геометрически, как уже говорилось во введении, речь идет о нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$. Чтобы дать механическое истолкование задачи Коши, обратимся к уравнению (19). Здесь задача Коши состоит в нахождении движения $x=x(t)$, определяемого этим уравнением и удовлетворяющего начальным условиям

$$x=x_0 \text{ при } t=t_0, \tag{22}$$

т. е. ищется такое движение, в котором точка занимает заданное положение x_0 в заданный момент времени t_0.

Будем говорить, что решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 *единственно*, если существует такая окрестность точки x_0, что: 1) в этой окрестности определено решение с начальными данными x_0, y_0; 2) не существует другого решения с начальными данными x_0, y_0, определенного в той же окрестности.

Задачи нахождения решения с начальными данными x_0, y_0, при которых уравнение не задано в точке (x_0, y_0), но задано в окрестности ее, или же начальные данные не являются конечными числами, будем называть *особыми случаями задачи Коши*. Здесь ищется решение $y=y(x)$ $[x=x(y)]$, обладающее свойством

$$y(x)\to y_0 \text{ при } x\to x_0\ [x(y)\to x_0 \text{ при } y\to y_0]. \tag{21'}$$

Во всех случаях задачи Коши основными вопросами являются вопросы о существовании, единственности и свойствах решения. Ответ на эти вопросы имеет принципиальное значение независимо от возможности фактического нахождения решения в том или ином виде.

Прежде чем решать конкретную задачу Коши, студент должен уяснить себе, с каким случаем задачи Коши он имеет дело — с основным или с особым, и исследовать вопрос о существовании и единственности решения.

5. Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы правая часть уравнения была непрерывна в окрестности начальной точки, причем решение будет определено (и непрерывно дифференцируемо) в общем случае лишь в некоторой окрестности начального значения независимой переменной. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема Пеано. *Если правая часть уравнения* (1) *определена и непрерывна в прямоугольнике* (рис. 11)

$$\mathrm{R}: |x-x_0| \leqslant a; \quad |y-y_0| \leqslant b, \tag{23}$$

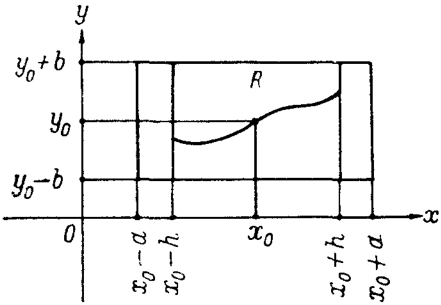

Рис. 11.

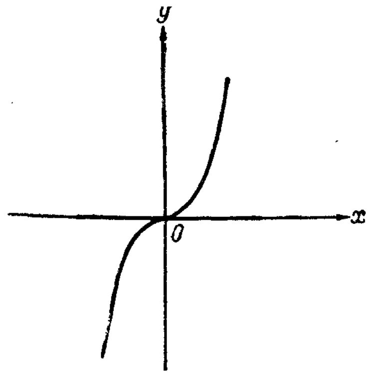

Рис. 12.

где a и b — заданные положительные числа, и, следовательно, ограничена в нем, т. е.

$$|f(x, y)| \leqslant M, \tag{24}$$

M — постоянное положительное число, а (x, y) — любая точка из R, то уравнение (1) *имеет хотя бы одно решение*

$$y = y(x), \tag{25}$$

удовлетворяющее начальным условиям (21), *заведомо определенное (и непрерывно дифференцируемое) в интервале*

$$|x-x_0| \leqslant h, \tag{26}$$

где h есть наименьшее из чисел a и $\frac{b}{M}$:

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{27}$$

Единственности решения теорема Пеано не гарантирует.

Пример. Уравнение

$$y' = 2\sqrt{|y|} \tag{28}$$

имеет непрерывно дифференцируемое решение с любыми начальными данными x_0, y_0, так как правая часть непрерывна на всей плоскости (x, y). Но единственность решения при любых начальных данных не гарантируется.

Так, если взять $x_0 = y_0 = 0$, то нетрудно убедиться, что единственность нарушена, ибо через начало координат (рис. 12), очевидно, проходит решение $y = 0$ (ось Ox) и интегральные кривые:

$$y = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ x^2, & x > 0; \end{cases} \quad y = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & x > 0; \end{cases} \quad y = \begin{cases} -x^2, & x \leqslant 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \tag{29}$$

6. Основной теоремой, обеспечивающей не только существование, но и единственность решения задачи Коши, является теорема Пикара. Дадим упрощенную формулировку этой теоремы, удобную для применения и достаточную для целей настоящей главы.

Теорема Пикара. *Если правая часть уравнения* (1) *определена в области R и удовлетворяет в ней двум условиям:*

1) *$f(x, y)$ непрерывна;*

2) *$\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и ограничена:*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant K, \tag{30}$$

где K — постоянное положительное число, то уравнение (1) *имеет единственное решение* (25), *удовлетворяющее начальным условиям* (21), *заведомо определенное (и непрерывно дифференцируемое) в интервале* (26).

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = A_0(x)\,y^n + A_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)\,y + A_n(x), \tag{31}$$

где n — целое положительное число.

Здесь правая часть есть полином относительно y. Предположим, что его коэффициенты $A_k(x)$ непрерывны в интервале (a, b). Тогда при любом y_0 и при всяком x_0 из интервала (a, b) существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (21). Это следует из того, что можно построить прямоугольник вида (23) с центром в точке (x_0, y_0), в котором будут выполнены оба условия теоремы Пикара.

Если коэффициенты $A_k(x)$ непрерывны при всех x, то x_0 тоже можно задавать совершенно произвольно. В частности, это имеет место, если эти коэффициенты $A_k(x)$ суть полиномы. Заметим, однако, что даже в этом случае решение $y = y(x)$ определено, в общем случае, не при всех x, а лишь в некоторой окрестности начального значения независимой переменной. Так, для уравнения $y' = y^2$ решением, удовлетворяющим начальным условиям $y = 1$ при $x = 0$, является $y = \frac{1}{1-x}$. Это решение определено не при всех x, а только в интервале $(-\infty, 1)$.

Пример 2. Оценить, пользуясь теоремой Пикара, область существования решения уравнения

$$y' = x^2 + y^2 \; (|x| \leqslant 2, \; |y| \leqslant 2), \tag{32}$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = 0 \text{ при } x = 0. \tag{33}$$

Искомое решение существует и единственно, ибо правая часть уравнения (32) есть полином относительно x и y. Найдем h. Имеем:

$$x_0=0,\ y_0=0;\ a=2,\ b=2;\ M=8;\ h=\min\left(2,\ \frac{2}{8}\right)=\frac{1}{4}.$$

Существование решения обеспечено теоремой Пикара лишь в интервале $|x|\leqslant\frac{1}{4}$.

Иногда решение задачи Коши для уравнения $y'=f(x,\ y)$ удается угадать. Тогда, если начальные данные x_0, y_0 *неособые*, т. е. в окрестности начальной точки выполнены условия теоремы существования и единственности, угаданное решение и будет единственным искомым решением. В этой связи всегда следует проверить, не является ли уже $y=y_0$ решением уравнения.

Пример 3. Найти интегральную кривую уравнения

$$y'=\sin(xy), \tag{34}$$

проходящую через начало координат.

Очевидно, что $y=0$ (ось Ox) является искомой интегральной кривой. В силу единственности, других решений нет.

Заметим, что в конечном виде уравнение (34) не интегрируется.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$y'=-\frac{2}{x^3} \tag{35}$$

с начальными данными $x_0=0$, $y_0=1$.

Искомым решением будет $x=0$ (ось Oy). Других решений нет (почему?).

Пример 5. Установить область существования и единственности для уравнения

$$y'=2\sqrt{y}. \tag{36}$$

Здесь правая часть определена и непрерывна при $y\geqslant 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}$ существует и непрерывна при $y>0$. Следовательно, областью существования и единственности решения задачи Коши является верхняя полуплоскость ($y>0$).

7. Обычно в результате интегрирования дифференциального уравнения первого порядка получают не одно решение, а семейство решений (семейство интегральных кривых), зависящее от одной произвольной постоянной C. Если это семейство задано в виде

$$y=\varphi(x,\ C);\ \Phi(x,\ y,\ C)=0;\ x=\varphi(t,\ C),\ y=\psi(t,\ C) \quad (t\text{ — параметр}), \tag{37}$$

то оно называется соответственно *общим решением, общим интегралом (общим решением, заданным в неявном виде)* или *общим решением в параметрической форме.*

Дадим строгое определение общего решения уравнения (1). Пусть D есть некоторая область на плоскости (x, y), через каждую точку которой проходит одна, и только одна, интегральная кривая уравнения (1).* (Например, можем предполагать, что в окрестности каждой точки области D выполнены условия теоремы Пикара.)

Определение.** Функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{38}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C и непрерывно дифференцируемая относительно x, называется *общим решением* уравнения (1) в области D, если она удовлетворяет двум условиям:

1) равенство (38) разрешимо в области D относительно произвольной постоянной C:

$$C = \psi(x, y); \tag{39}$$

2) функция (38) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольной постоянной C, доставляемых формулой (39), когда точка (x, y) пробегает область D.

Пример 1. Проверить, что функция

$$y = (x + C)^2 \ (x > -C) \tag{40}$$

является общим решением уравнения (36),

$$y' = 2\sqrt{y},$$

в верхней полуплоскости ($y > 0$).

Прежде всего нужно убедиться, что верхнюю полуплоскость можно брать в качестве области D. Это уже показано в примере 5, п. 6.

Проверим теперь выполнение условий «1» и «2». Равенство (40) разрешимо в верхней полуплоскости относительно C:

$$C = \sqrt{y} - x, \tag{41}$$

так что условие «1» выполнено. Условие «2» тоже выполнено, ибо функция (40) является решением уравнения (36) при любом C:

$$2(x + C) \equiv 2\sqrt{(x + C)^2} \ (x + C > 0). \tag{42}$$

Общему решению (40) геометрически соответствует семейство полупарабол, изображенное на рис. 13.

---

* Так что область D есть множество начальных данных, причем такое, что решение задачи Коши с этими начальными данными существует и единственно. Не следует смешивать область D с интервалом существования решения конкретной задачи Коши с начальными данными из области D.

** Приводимая ниже формулировка определения общего решения принадлежит Н. П. Еругину. Существуют и другие определения общего решения (см., например, Петровский, стр. 13).

Зная общее решение в области D, легко получить из него решение задачи Коши с любыми начальными данными x_0, y_0 из области D. Действительно, подставляя в формулу (38) вместо x и y числа x_0 и y_0, получим

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \tag{43}$$

Это равенство разрешимо относительно C:

$$C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0. \tag{44}$$

Подставляя найденное значение C в формулу общего решения, получим

$$y = \varphi(x, C_0). \tag{45}$$

Эта функция и есть искомое решение*. Других решений нет.

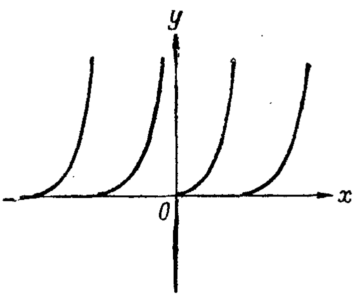

Рис. 13.

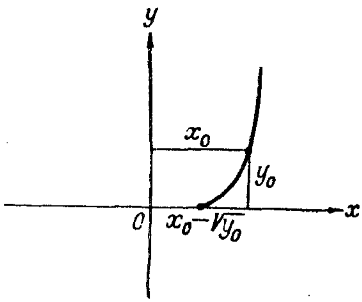

Рис. 14

Пример 2. Найти решение уравнения (36),

$$y' = 2\sqrt{y},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0 > 0 \text{ при } x = x_0, \tag{46}$$

пользуясь формулой общего решения (40).

Следуя указанному выше способу, имеем:

$$y_0 = (x_0 + C)^2;\ C = \sqrt{y_0} - x_0 = C_0;\ y = (x + C_0)^2\ (x > -C_0). \tag{47}$$

Искомым решением будет полупарабола (рис. 14)

$$y = (x + \sqrt{y_0} - x_0)^2\ (x > x_0 - \sqrt{y_0}). \tag{48}$$

Общее решение вида

$$y = \varphi(x, x_0, y_0), \tag{49}$$

где x_0 фиксировано, а y_0 (значение искомой функции y при $x = x_0$) играет роль произвольной постоянной, называется *общим решением в форме Коши.*

---

* Ибо она является решением уравнения (1) и $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

Так, в примере 2 функция (48) будет общим решением уравнения (36) в верхней полуплоскости в форме Коши, если фиксировать x_0 и считать y_0 произвольным (при $x_0=0$ произвольная постоянная y_0 есть отрезок, отсекаемый интегральной кривой на оси Oy).

Если правая часть уравнения (1) удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара в прямоугольнике R с центром в начальной точке (x_0, y_0), то можно указать такой прямоугольник с центром в той же точке и лежащий внутри R, в котором будет существовать общее решение уравнения (1) в форме Коши (см. ниже, гл. V, § 3).

Знание общего решения в форме Коши даст возможность получать решение любой конкретной задачи Коши простой заменой y_0 заданным начальным значением искомого решения при $x=x_0$ и изучать зависимость решения задачи Коши от начального значения искомой функции.

8. Решение $y=y(x)$ называется *частным*, если в каждой его точке сохраняется единственность решения задачи Коши. Решение, содержащееся в формуле общего решения (38), т. е. получающееся из нее при конкретном (допустимом) числовом значении произвольной постоянной (включая $\pm\infty$), является частным решением. Решение задачи Коши, полученное из общего решения по методу п. 7, всегда является частным решением.

9. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым.*

Если правая часть уравнения (1) удовлетворяет во всей области задания условиям теоремы Пикара, то это уравнение, очевидно, не имеет особых решений.

В частности, уравнение с полиномиальной правой частью заведомо не имеет особых решений. Уравнение, правая часть которого есть отношение полиномов, и уравнение $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$, где M и N — полиномы относительно x и y, также не имеют особых решений.

Если в уравнении (1) функция $f(x, y)$ непрерывна по x и y и имеет частную производную по y (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые $y=\varphi(x)$, во всех точках которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)}=\infty. \tag{50}$$

Будем называть такие кривые *подозрительными на особое решение** по аналитическому виду правой части уравнения.

* Вообще, *кривой, подозрительной на особое решение*, мы будем называть всякую кривую, которая, по тем или иным соображениям, может оказаться особым решением, но не обязательно является таковым.

Если кривая $y=\varphi(x)$ будет решением данного дифференциального уравнения и в каждой точке этого решения нарушается единственность решения задачи Коши (т. е. через каждую точку (x_0, y_0) этого решения проходит не одна интегральная кривая), то она будет особым решением.

Кривые, подозрительные на особое решение, можно также искать по аналитическому виду семейства интегральных кривых, зависящего от одной произвольной постоянной C.

Предположим, что уравнение (1) допускает однопараметрическое семейство интегральных кривых

$$\Phi(x, y, C)=0, \tag{51}$$

где C — параметр. Предположим, что это семейство кривых имеет *огибающую*, т. е. такую кривую, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной кривой семейства (51) и ни на каком участке не совпадает с одной из кривых семейства (51).* Очевидно, что ***огибающая семейства интегральных кривых*** (51) ***уравнения*** (1) ***является решением этого уравнения и притом особым*** (почему?).

В дифференциальной геометрии доказывается, что при известных предположениях как относительно семейства кривых, так и относительно огибающей последней может быть только *дискриминантная кривая*, т. е. кривая, определяемая уравнением семейства и уравнением, полученным дифференцированием его по параметру. Дискриминантная кривая семейства интегральных кривых определяется из системы

$$y=\varphi(x, C), \quad 0=\frac{\partial\varphi}{\partial C} \tag{52}$$

или

$$\Phi(x, y, C)=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial C}=0. \tag{53}$$

Найдя дискриминантную кривую, нужно проверить, будет ли она (или ее часть) огибающей данного семейства (или части его).

Во многих случаях легко сделать эту проверку, исходя из чисто геометрических соображений. Можно также воспользоваться следующим достаточным признаком огибающей.

Если система (53) имеет решение

$$x=x(C), \quad y=y(C), \tag{54}$$

---

* См.: И. Г. Петровский, стр. 109—113; Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, 1947, стр. 620—628.

представляющее *кривую в гладкой параметризации*, т. е. x и y суть непрерывно дифференцируемые функции от C, причем $x_C'^2 + y_C'^2 \neq 0$, и если на этой кривой

$$\Phi_x'^2 + \Phi_y'^2 \neq 0, \tag{55}$$

то она будет огибающей семейства (51).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}. \tag{56}$$

Найдем семейство интегральных кривых. Имеем:

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} y' = 1,$$

$$\left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = 1, \quad y^{\frac{1}{3}} = x + C,$$

откуда

$$y = (x + C)^3. \tag{57}$$

Найдем дискриминантную кривую. Из системы

$$\left.\begin{aligned} y &= (x + C)^3, \\ 0 &= 3(x + C)^2 \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

получим

$$x = -C, \quad y = 0. \tag{59}$$

Дискриминантная кривая $y = 0$ (ось Ox), очевидно, будет огибающей семейства (57) (сделать рисунок).

В этом можно убедиться и на основании сформулированного выше достаточного признака огибающей. В самом деле кривая (59), определяемая уравнениями (58), есть кривая в гладкой параметризации, ибо x и y суть непрерывно дифференцируемые функции от C и $x_C' = -1 \neq 0$. Условие (55) на кривой (59), очевидно, выполнено, ибо

$$\Phi = y - (x + C)^3, \quad \Phi_y' = 1 \neq 0. \tag{60}$$

Поэтому $y = 0$ есть огибающая семейства (57) и, следовательно, *особое* решение уравнения (56).

Отметим, наконец, что особыми решениями могут оказаться решения, теряемые в результате преобразований данного дифференциального уравнения, которые выполняются в процессе интегрирования его. Например, при делении обеих частей уравнения на некоторую функцию $\omega(x, y)$ мы можем потерять решения, обращающие эту функцию в нуль.

Решая задачу Коши, нельзя ограничиваться нахождением частного решения (которое обычно получают из семейства решений, зависящего от произвольной постоянной C), ибо может оказаться, что уравнение имеет особое решение, тоже удовлетворяющее поставленным начальным условиям. В последнем случае решением задачи Коши будет также любая „гладкая“ комбинация отрезков частного и особого решений, полученная путем склеивания их в начальной точке. Очевидно, что такое решение не является ни частным, ни особым.

Пример 2. Найти кривую, подозрительную на особое решение уравнения (36),

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\sqrt{y},$$

и исследовать, будет ли она особым решением.

Решим эту задачу каждым из трех указанных выше способов.

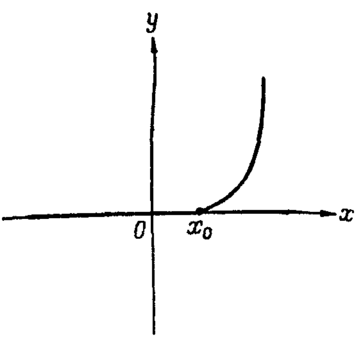

Рис. 15.

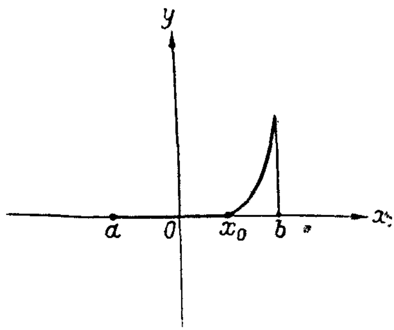

Рис. 16.

1. Найдем кривую, подозрительную на особое решение по виду правой части уравнения. Имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}\bigg|_{y=\varphi(x)} = \infty. \tag{61}$$

Ясно, что в качестве кривой $y = \varphi(x)$ можно взять только $y = 0$ (ось Ox). Она является решением уравнения (36). В каждой точке этого решения нарушается единственность решения задачи Коши. В самом деле, возьмем любую точку $(x_0, 0)$ на решении $y = 0$. Подставим координаты этой точки в общее решение (40). Получим $0 = (x_0 + C)^2$, откуда $C = -x_0$. Подставляя это значение C в общее решение (40), получим частное решение $y = (x - x_0)^2$ $(x > x_0)$, которое примыкает к точке $(x_0, 0)$ (рис. 15). Таким образом, через точку $(x_0, 0)$ проходит не одна интегральная кривая. Следовательно, $y = 0$ есть особое решение уравнения (36).

Заметим, что через точку $(x_0, 0)$ проходит также бесчисленное множество интегральных кривых вида (рис. 16):

$$y = \begin{cases} 0 & \text{для } a \leqslant x \leqslant x_0, \\ (x - x_0)^2 & \text{для } x_0 < x \leqslant b, \\ (-\infty < a < x_0, \ x_0 < b < +\infty), \end{cases} \tag{62}$$

представляющих собой комбинации отрезков особого и частного решений.*

* В дальнейшем в ответах на задачи, в которых требуется проинтегрировать данное дифференциальное уравнение или решить задачу Коши, подобные комбинации не указываются. Составление их предоставляется читателю.

2. Найдем огибающую семейства интегральных кривых

$$y=(x+C)^2 \quad (x \geqslant -C). \tag{63}$$

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} y&=(x+C)^2, \\ 0&=2(x+C), \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

так что дискриминантной кривой будет $y=0$. Из рис. 13 ясно, что $y=0$ есть огибающая семейства (63). Следовательно, $y=0$ есть особое решение уравнения (36).

3. Уравнение (36) можно интегрировать так. Разделим обе части на $2\sqrt{y}$ и умножим на dx. Получим:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}}=dx \; (2\sqrt{y}=0?). \tag{65}$$

В скобках мы указываем для памяти то (конечное) уравнение, которое нужно рассмотреть после интегрирования уравнения (65), ибо деление уравнения (36) на $2\sqrt{y}$ может привести к потере решений.

Интегрируя уравнение (65), получаем:

$$\sqrt{y}=x+C>0, \tag{66}$$

откуда

$$y=(x+C)^2 \quad (x>-C). \tag{67}$$

Из уравнения $2\sqrt{y}=0$ находим $y=0$. Функция $y=0$ является решением уравнения (36). Это решение, как показано выше, особое.

10. *Интегралом* дифференциального уравнения (1) называется непрерывно дифференцируемая функция $\psi(x, y)$,* полный дифференциал которой

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy \tag{68}$$

обращается в тождественный нуль *в силу уравнения* (1), т. е. при замене dy его значением из этого уравнения:

$$d\psi\,|_{(1)}=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}f(x, y)\,dx\equiv 0. \tag{69}$$

Интеграл $\psi(x, y)$ обладает тем свойством, что он обращается в тождественную постоянную вдоль всякого частного решения $y=\varphi(x, C_0)$ уравнения (1):

$$\psi[x, \varphi(x, C_0)]\equiv C_0. \tag{70}$$

Пример. Функция

$$\psi=\sqrt{y}-x \; (y>0) \tag{71}$$

является интегралом уравнения (36). Действительно,

$$d\psi\,|_{(36)}=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot 2\sqrt{y}dx-dx\equiv 0. \tag{72}$$

* $\psi(x, y)\not\equiv \text{const}$.

Если правая часть уравнения (1) удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара в прямоугольнике R с центром в начальной точке (x_0, y_0) и, кроме того, непрерывно дифференцируема по y, то можно указать такую область, содержащую внутри себя точку (x_0, y_0) и лежащую внутри R, в которой будет существовать интеграл уравнения (1) (см. гл. V, § 3). В случае уравнения вида (5) для существования интеграла, определенного в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0), достаточно потребовать, чтобы функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ были непрерывно дифференцируемы в заданной окрестности этой точки (например, в прямоугольнике R) и чтобы $M^2(x_0, y_0) + N^2(x_0, y_0) \neq 0$.

Всякие два интеграла $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ уравнения (1) или (5), определенные в одной и той же области D, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши, зависимы между собой, т. е. внутри D найдется такая точка (x_0, y_0), в некоторой окрестности которой выполняется (тождественно относительно x и y) соотношение

$$\Psi_2 = \Phi(\psi_1), \tag{73}$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция (Матвеев. Методы интегрирования, п. **17**).

Если функция $\psi(x, y)$ — интеграл уравнения (1), то равенство

$$\psi(x, y) = C, \tag{74}$$

где C — произвольная постоянная, есть общий интеграл этого уравнения. Соотношение

$$\Phi(\psi) = C \tag{75}$$

тоже будет общим интегралом уравнения (1).

Если $\psi_1(x, y) = C_1$ и $\psi_2(x, y) = C_2$ — общие интегралы уравнения (1), определенные в одной и той же области D, то $\psi_2 = \Phi(\psi_1)$.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

11. Уравнение, не содержащее искомой функции

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{1}$$

в предположении, что его правая часть непрерывна в интервале (a, b), интегрируется в квадратурах. Его общим решением в области

$$a < x < b, \ |y| < +\infty \tag{2}$$

будет

$$y=\int f(x)\,dx+C \tag{3}$$

или (в форме Коши)

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+y_0, \tag{4}$$

где y_0 — произвольная постоянная $[y_0=y(x_0)]$, $a<x_0<b$.

Для решения задачи Коши с начальными данными x_0, $\bar{y}_0$ ($|\bar{y}_0|<+\infty$) достаточно положить в формуле (4) $y_0=\bar{y}_0$.

Изоклинами уравнения (1) будут прямые $x=x_0\,(a<x_0<b)$. Все интегральные кривые (3) пересекают каждую изоклину под одним и тем же углом и получаются из одной интегральной кривой этого семейства сдвигом параллельно оси Oy.

Если $f(x)$ непрерывна во всех точках интервала $(a,\ b)$, кроме одной точки $x=\xi$, и обращается в точке $x=\xi\,(a<\xi<b)$ в бесконечность, то прямая $x=\xi$ будет решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x)}. \tag{5}$$

Это решение может оказаться особым.

Пример 1. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x}} \tag{6}$$

имеет общее решение

$$y=-2\sqrt{1-x}+C \tag{7}$$

(в области $-\infty<x<1$, $|y|<+\infty$). Правая часть уравнения (6) обращается в бесконечность при $x=1$. Прямая $x=1$ является решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{1-x}. \tag{6'}$$

Это решение особое (почему?).

Пример 2. Для уравнения

$$y'=-\frac{1}{x^2} \tag{8}$$

общим решением (в каждой из областей $-\infty<x<0$, $|y|<+\infty$; $0<x<+\infty$, $|y|<+\infty$) будет

$$y=\frac{1}{x}+C. \tag{9}$$

Решение $x=0$ — частное (почему?).

12. Уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(y), \tag{10}$$

не содержащее независимой переменной x, в случае, когда $f(y)$ определена и непрерывна в интервале (c, d) и не обращается (в этом интервале) в нуль, равносильно уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}, \tag{10'}$$

не содержащему искомой функции x, так что все интегральные кривые уравнения (10) содержатся в формуле

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{11}$$

Это есть общий интеграл уравнения (10). Его можно переписать в форме Коши

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} + x_0, \tag{12}$$

где y_0 — фиксированное число $(c < y_0 < d)$, а x_0 играет роль произвольной постоянной.

Изоклинами уравнения (10) являются прямые $y = y_0 (c < y_0 < d)$. Все интегральные кривые семейства (11) получаются из одной интегральной кривой этого семейства сдвигом параллельно оси Ox.

Если $f(y)$ обращается в нуль при $y = b$, причем $c < b < d$, то функция $y = b$, очевидно, будет решением уравнения (10). Это решение может оказаться особым.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 1} \tag{13}$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку $M(0, 1)$. Деля обе части уравнения на $\sqrt{y^2 - 1}$ и умножая на dx, имеем:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = dx \left(\sqrt{y^2 - 1} = 0?\right), \tag{14}$$

откуда

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = x + C. \tag{15}$$

Положив в интеграле слева $y = \operatorname{ch} t$, получим $t = x + C$. Следовательно,

$$y = \operatorname{ch}(x + C) \quad (x > -C) \tag{16}$$

будет общим решением уравнения (13) в области

$$|x| < +\infty, \quad 1 < y < +\infty. \tag{17}$$

Аналогично, полагая $y = -\operatorname{ch} t$, найдем, что

$$y = -\operatorname{ch}(x + C) \quad (x < -C) \tag{18}$$

есть общее решение в области

$$|x| < +\infty, \quad -\infty < y < -1. \tag{19}$$

Из уравнения $\sqrt{y^2-1}=0$ имеем $y=\pm 1$. Эти прямые — особые решения.

Обратимся теперь к поставленной задаче Коши. Заметим, что точка $M(0, 1)$ лежит на особом решении $y=1$. Найдем, пользуясь формулой (16), частное решение, примыкающее к точке M. Полагая в (16) $x=0$, $y=1$, получим $1=\operatorname{ch} C$, откуда $C=0$, так что искомым частным решением будет $y=\operatorname{ch} x\ (x>0)$. Итак, через точку $M(0, 1)$ проходят две интегральные кривые: $y=\operatorname{ch} x\ (x>0)$ и $y=1$.

Пример 2. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx}=y^2-1 \tag{20}$$

общим интегралом будет

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x+C. \tag{21}$$

Из уравнения $y^2-1=0$ находим $y=\pm 1$. Эти прямые — частные решения. Здесь никакая проверка сохранения единственности не нужна, ибо уравнение (20) заведомо не имеет особых решений (почему?).

13. *Уравнение с разделенными переменными*

$$X(x)\,dx+Y(y)\,dy=0, \tag{22}$$

в котором $X(x)$ и $Y(y)$ суть функции, зависящие соответственно только от x и только от y и непрерывные при рассматриваемых значениях x и y, интегрируется непосредственно: равенство

$$\int X(x)\,dx+\int Y(y)\,dy=C \tag{23}$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x} X(x)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Y(y)\,dy=C \tag{24}$$

является общим интегралом уравнения (22).

Если $X(x_0)$ и $Y(y_0)$ не равны нулю одновременно, то решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 дается формулой

$$\int\limits_{x_0}^{x} X(x)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Y(y)\,dy=0, \tag{25}$$

которая при сделанном предположении относительно X и Y определяет единственное решение уравнения (22) в виде $y=y(x)$ или $x=x(y)$ с начальными данными x_0, y_0 (почему?).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$e^{-x^2}dx+\frac{1}{y}\,dy=0 \quad (y>0). \tag{26}$$

Оно имеет общий интеграл

$$\int\limits_{0}^{x} e^{-x^2}dx+\int\limits_{1}^{y}\frac{1}{y}\,dy=C \tag{27}$$

или

$$\int_0^x e^{-x^2}dx + \ln y = C. \tag{28}$$

Решением с начальными условиями

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{29}$$

будет

$$\int_0^x e^{-x^2}dx + \ln y = 0. \tag{30}$$

Уравнение вида

$$m(x)\,n(y)\,dx + m_1(x)\,n_1(y)\,dy = 0, \tag{31}$$

в котором коэффициенты при dx и dy являются произведениями функций, зависящих только от одной из переменных x и y, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Предположим, что функции $m(x)$, $n(y)$, $m_1(x)$ и $n_1(y)$ непрерывны при рассматриваемых значениях x и y. Тогда, умножая обе части уравнения (31) на функцию

$$\mu = \frac{1}{m_1(x)\,n(y)}, \tag{32}$$

получаем уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0\ [m_1(x) = 0,\ n(y) = 0?]. \tag{33}$$

Поэтому общим интегралом уравнения (31) будет

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C \tag{34}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C\ [m_1(x_0) \neq 0,\ n(y_0) \neq 0]. \tag{35}$$

Если уравнения $m_1(x) = 0$, $n(y) = 0$ имеют вещественные решения $x = a$, $y = b$, то функции $x = a\ (y \neq b)$, $y = b\ (x \neq a)$, будучи всегда решениями уравнения (31),* могут оказаться особыми решениями.

Решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, не лежащими на особом решении, и такими, что $m_1(x_0) \neq 0$, $n(y_0) \neq 0$ и $m^2(x_0) + n_1^2(y_0) \neq 0$, дается формулой

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0. \tag{36}$$

* Точки вида $x = a$, $y = b$ исключаются из решений, так как в этих точках уравнение (31) не задано (поле не определено).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$2x\sqrt{y}\,dx+(1-x^2)\,dy=0 \tag{37}$$

и выделить интегральные кривые, проходящие через заданные точки $M_1(0,\ 1)$, $M_2(1,\ 1)$, $M_3(0,\ 0)$, $M_4(1,\ 0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности.

Разделяя переменные в уравнении (37), имеем:

$$\frac{2x}{1-x^2}\,dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0\ \left(1-x^2=0,\sqrt{y}=0?\right). \tag{38}$$

Интегрируя, получаем общий интеграл

$$-\ln|1-x^2|+2\sqrt{y}=C. \tag{39}$$

Из уравнения $1-x^2=0$ находим $x=\pm 1$. Функции $x=1\ (y\neq 0)$ и $x=-1\ (y\neq 0)$ являются частными решениями (почему?). Уравнение $\sqrt{y}=0$ дает $y=0$. Решение $y=0\ (x\neq\pm 1)$ особое (почему?).

Обратимся к решению поставленных задач Коши.

Через точку $M_1(0,\ 1)$ проходит одна, и только одна, интегральная кривая (почему?). Ее уравнение можно найти обычным путем из общего интеграла (39). Полагая в нем $x=0$, $y=1$, находим $C=2$, так что искомым решением будет

$$-\ln|1-x^2|+2\sqrt{y}=2. \tag{40}$$

Это же решение можно получить сразу, пользуясь формулой (36). Имеем:

$$\int\limits_0^x\frac{2x}{1-x^2}\,dx+\int\limits_1^y\frac{dy}{\sqrt{y}}=0. \tag{41}$$

Выполняя вычисления, придем к решению (40).

Через точку $M_2(1,\ 1)$ тоже проходит только одна интегральная кривая (почему?), а именно, $x=1\ (y>0)$.

Точка $M_3(0,\ 0)$ лежит на особом решении $y=0$, так что в ней нарушается единственность решения задачи Коши. Кроме особого решения $y=0$ через нее проходит интегральная кривая

$$-\ln|1-x^2|+2\sqrt{y}=0.^* \tag{42}$$

В точке $M_4(1,\ 0)$ поле не определено. К ней примыкают решения $x=1$ $(y\neq 0)$.

Пример 3. Уравнение

$$x(y^2-1)\,dx+y(x^2-1)\,dy=0 \tag{43}$$

(Степанов, гл. I, § 2, пример 6) имеет общий интеграл

$$(x^2-1)(y^2-1)=C. \tag{44}$$

Особых решений заведомо нет (почему?).

14. Уравнение

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0, \tag{45}$$

---

* И, как всегда, бесчисленное множество интегральных кривых, составленных из отрезков особого и частного решений (см. сноску на стр. 31).

в котором M и N суть однородные (положительно однородные) функции одного и того же измерения* (которые мы будем предполагать непрерывными), называется *однородным* (*положительно однородным*).

Однородное уравнение всегда можно привести к виду

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{46}$$

где правая часть есть однородная функция от x и y нулевого измерения. При этом, как всегда, наряду с уравнением (46) следует рассматривать перевернутое уравнение.

Предположим, что функция $\varphi(z)$ определена и непрерывна в некотором интервале (a, b). Тогда правая часть уравнения (46) определена в области $a<\frac{y}{x}<b$. В начале координат однородное уравнение (и поле направлений, определяемое им) не задано. Изоклинами являются полупрямые $y=kx$ $(x\neq 0)$, лежащие в области задания уравнения $(a<k<b)$.

Однородное (и положительно однородное) уравнение (45) всегда интегрируется в квадратурах, ибо, считая x независимой переменной и вводя вместо y новую неизвестную функцию z при помощи подстановки

$$y=zx, \tag{47}$$

его можно привести (сокращая при этом на x^m) к уравнению с разделяющимися переменными

$$[M(1,\ z)+N(1,\ z)z]\,dx+xN(1,\ z)\,dz=0 \quad (x=0?). \qquad (*)$$

Общим интегралом уравнения (45) будет

$$x=Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

где

$$\psi(z)=-\int\frac{N(1,\ z)\,dz}{M(1,\ z)+N(1,\ z)z}.$$

Так как уравнение (*) может иметь особые решения вида $z=b$, то однородное решение может иметь особые решения вида $y=bx$ $(x\neq 0)$. Кроме того, особыми решениями могут быть полуоси оси Oy: $x=0$ $(y\neq 0)$.

Все интегральные кривые однородного уравнения (46), не являющиеся полупрямыми, выходящими из начала координат, по-

* Функция $f(x,\ y)$ называется *однородной* функцией измерения m, если от умножения ее аргументов на любое число t она приобретает множитель t^m.

$$f(tx,\ ty)=t^m f(x,\ y).$$

Если последнее тождество выполняется лишь при $t\geqslant 0$, то функция $f(x,\ y)$ называется *положительно однородной*.

лучаются из одной такой интегральной кривой при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат.

Некоторые неоднородные уравнения приводятся к однородным уравнениям при помощи соответствующей замены одной или обеих переменных. Простейшим из таких уравнений является уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right), \tag{48}$$

где $c_1^2 + c^2 \neq 0$. Это уравнение, в случае когда определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a\ b \end{vmatrix} \tag{49}$$

не равен нулю, приводится к однородному уравнению при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + \alpha, \\ y &= \eta + \beta, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

где ξ и η — новые переменные, а α и β — некоторые постоянные числа, которые выбираются так, чтобы в новом уравнении числа, играющие роль c_1 и c, были равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0, \\ a\alpha + b\beta + c &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Определив из этой системы α и β и выполняя подстановку (50), получим однородное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right). \tag{52}$$

Если определитель (49) равен нулю, то уравнение (48) не может быть приведено к однородному. Но в этом случае оно интегрируется еще легче, ибо подстановкой

$$z = ax + by, \tag{53}$$

где z — новая неизвестная функция, уравнение (48) приводится к уравнению, не содержащему независимой переменной.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение

$$xdy + \left(x\sqrt{\frac{y}{x} - 1} - y\right)dx = 0 \tag{54}$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 1. \tag{55}$$

Уравнение (54) — однородное (почему?). Полагая $y = zx$, придем к уравнению с разделяющимися переменными:

$$xdz + \sqrt{z - 1}\, dx = 0. \tag{56}$$

Это уравнение имеет общий интеграл

$$2\sqrt{z-1}+\ln|x|=C \tag{57}$$

и особое решение

$$z=1. \tag{58}$$

Возвращаясь к искомой функции y, т. е. полагая $z=\frac{y}{x}$, получим

$$2\sqrt{\frac{y}{x}-1}+\ln|x|=C. \tag{59}$$

Это — общий интеграл уравнения (54). Полагая в формуле $y=zx$ переменную z, равной единице, найдем решения

$$y=x\ (x\neq 0). \tag{60}$$

Эти решения — особые (почему?).

Пример 2. Уравнение

$$(x+y+1)\,dx-(x-1)\,dy=0 \tag{61}$$

может быть приведено к виду (48). Но в этом приведении нет необходимости. Указанным выше методом уравнение (61) непосредственно приводится к однородному уравнению, ибо определитель (49) будет отличен от нуля. Используя подстановку (50), имеем для определения α и β систему

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+1&=0,\\ \alpha-1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

откуда $\alpha=1$, $\beta=-2$, так что уравнение (61) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned}x&=\xi+1,\\ y&=\eta-2\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

приведется к однородному уравнению

$$(\xi+\eta)\,d\xi-\xi d\eta=0. \tag{64}$$

Его общим решением будет

$$\eta=\xi(\ln|\xi|+C). \tag{65}$$

Полагая здесь $\xi=x-1$, $\eta=y+2$, получим общее решение уравнения (61) в виде

$$y=(x-1)(\ln|x-1|+C)-2. \tag{66}$$

Особых решений уравнение (61) заведомо не имеет (почему?).

15. Уравнение

$$M(x,\ y)\,dx+N(x,\ y)\,dy=0 \tag{67}$$

называется *обобщенным однородным*, если существует такое число k, при котором левая часть уравнения (67) становится однородной функцией от величин x, y, dx и dy в предположении, что последние имеют соответственно первое, k-ое, нулевое и $(k-1)$-ое измерения. При $k=1$ обобщенное однородное уравнение является обычным однородным уравнением.

Обобщенное однородное уравнение всегда интегрируется в квадратурах, ибо оно при помощи подстановки

$$y=zx^k\quad (k\neq 0), \tag{68}$$

где z — новая неизвестная функция, приводится к уравнению с разделяющимися переменными. При $k=0$ обобщенное однородное уравнение уже является уравнением с разделяющимися переменными (Матвеев. Методы интегрирования, п. **29**).

Пример. Убедиться, что уравнение

$$(x^2y^2+y^3)\,dx+x^5dy=0 \tag{69}$$

есть обобщенное однородное, и проинтегрировать его.

Искомое число k должно удовлетворять условию

$$2+2k=3k=5+k-1. \tag{70}$$

Такое число существует: $k=2$. Следовательно, уравнение (69) — обобщенное однородное.

Полагая

$$y=zx^2, \tag{71}$$

приведем уравнение (69) к виду (сокращая на x^6):

$$(z^3+z^2+2z)\,dx+xdz=0.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln\frac{z^2x^4}{z^2+z+2}-\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{7}}=C.$$

Возвращаясь к искомой функции y, получим:

$$\ln\frac{y^2x^4}{2x^4+y^2+yx^2}-\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\frac{2y}{x^2}+1}{\sqrt{7}}=C. \tag{72}$$

Это есть общий интеграл уравнения (69). Особых решений заведомо нет (почему?).

Рассмотренные выше типы уравнений допускали интегрирование в конечном виде при помощи метода разделения переменных, который применялся непосредственно или после предварительных преобразований. Рассмотрим новые типы.

16. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=q(x) \tag{73}$$

называется *линейным*. Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение (73) принимает вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=0 \tag{74}$$

и называется *однородным линейным уравнением*, так как его левая часть однородна и линейна относительно y и $\frac{dy}{dx}$. Если $q(x)\not\equiv 0$, то уравнение (73) называется *неоднородным линейным уравнением*.

Предположим, что $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале (a, b) $(a \geqslant -\infty,\ b \leqslant +\infty)$. Тогда через каждую точку полосы

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty \tag{75}$$

проходит одна, и только одна, интегральная кривая уравнения (73), ибо в окрестности любой точки из этой полосы выполнены условия теоремы Пикара (п. **6**, пример 1).

В частности, единственным решением однородного линейного уравнения, проходящим через точку $(x_0, 0)$, лежащую на отрезке (a, b) оси Ox, является сам этот отрезок

$$y \equiv 0 \quad (a < x < b). \tag{76}$$

Это решение называется *нулевым* (*очевидным*, или *тривиальным*) решением. Оно удовлетворяет так называемым *нулевым* начальным условиям:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \in (a, b). \tag{77}$$

Других решений, удовлетворяющих нулевым начальным условиям, однородное линейное уравнение (при сделанном предположении относительно непрерывности $p(x)$) не имеет. Отсюда следует, что интегральная кривая однородного линейного уравнения, проходящая через точку, не лежащую на оси Ox, не может ни пересекать ось Ox, ни касаться ее (почему?).

Всякое решение линейного уравнения, расположенное в полосе (75), где (a, b) — интервал непрерывности коэффициента $p(x)$ и правой части $q(x)$, является частным. Особых решений в указанной полосе линейное уравнение не имеет.

Линейное уравнение сохраняет свой вид (т. е. остается линейным) при любой замене независимой переменной $x = \varphi(t)$ [$\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируема в (t_0, t_1), причем $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(t_1)$ и $\varphi'(t) \neq 0$ в (t_0, t_1)] и при любой линейной замене искомой функции $y = \alpha(x) z + \beta(x)$.

Свойство однородности сохраняется при любой замене независимой переменной и при любой однородной линейной замене искомой функции.

Однородное линейное уравнение (74), очевидно, всегда интегрируется в квадратурах, ибо оно является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим:

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}. \tag{78}$$

Все решения уравнения (74) содержатся в этой формуле. Она представляет собой общее решение уравнения (74) в полосе (75).

Из формулы (78) следует, что всякое решение однородного линейного уравнения определено (и непрерывно дифференцируемо) во всем интервале (a, b) (в котором коэффициент $p(x)$ непрерывен).

Общее решение (78) можно переписать в форме Коши:

$$y=y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}, \tag{79}$$

где x_0 — фиксированное число из интервала (a, b), а y_0 произвольно $[y_0=y(x_0)]$. Если y_0 тоже фиксировано, то эта формула дает решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0.

Решения однородного линейного уравнения (74) обладают двумя характерными свойствами:

1) *если* $y_1=y_1(x)$ *есть частное решение, то*

$$y=Cy_1, \tag{80}$$

где C *— любое постоянное число тоже является решением*;

2) *если* $y_1=y_1(x)$ *— ненулевое частное решение, т. е.* $y_1(x)\not\equiv 0$, *то все решения уравнения* (74) *содержатся в формуле* (80), *где* C *— произвольная постоянная. Эта формула дает общее решение однородного линейного уравнения* (74) *в полосе* (75), в чем легко убедиться, исходя из определения общего решения, как это сделано в п. **7**, пример 1. [При этом существенно используется тот факт, что $y_1(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке из (a, b) (почему?).]

Структура общего решения неоднородного линейного уравнения устанавливается следующей теоремой.

Теорема. *Если* y_1 *— частное решение неоднородного уравнения* (73), *а*

$$z=Ce^{-\int p(x)\,dx} \tag{81}$$

— общее решение соответствующего однородного линейного уравнения

$$z'+p(x)z=0, \tag{82}$$

то функция

$$y=y_1+Ce^{-\int p(x)\,dx} \tag{83}$$

является общим решением уравнения (73) *в полосе* (75).

Из формул (78) и (83) видно, что общее решение всякого линейного уравнения является линейной функцией от произвольной постоянной C:

$$y=A(x)C+B(x). \tag{84}$$

Рассмотрим два основных метода интегрирования неоднородного линейного уравнения в конечном виде: метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) и метод интегрирующего множителя (метод Эйлера).

Метод Лагранжа состоит в том, что решение неоднородного линейного уравнения ищется в том же виде, что и общее решение соответствующего однородного уравнения, но вместо произвольной постоянной C берется некоторая непрерывно дифференцируемая функция от x:

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)\, dx}. \tag{85}$$

Подставляя (85) в (73), находим условие, которому должна удовлетворять функция $C(x)$:

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)\, dx} = q(x),$$

откуда

$$C(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx} dx + C, \tag{86}$$

и, следовательно,

$$y = e^{-\int p(x)\, dx} \left[C + \int q(x)\, e^{\int p(x)\, dx} dx \right]. \tag{87}$$

Это есть общее решение уравнения (73) в полосе (75), в чем легко убедиться непосредственно, исходя из определения общего решения или же заметив, что функцию (87) можно представить в виде (83). Формула (87) содержит все решения уравнения (73). Из нее видно, что всякое решение этого уравнения определено во всем интервале (a, b).

Метод Эйлера состоит в приведении левой части уравнения (73) к виду точной производной от некоторой функции от x путем умножения обеих частей уравнения на соответствующую функцию $\mu = \mu(x)$. Эта функция определяется из условия

$$\mu y' + \mu p(x)\, y = (\mu y)', \tag{88}$$

откуда

$$\mu p(x) = \mu', \tag{89}$$

и, следовательно,

$$\mu = e^{\int p(x)\, dx}. \tag{90}$$

Функция (90) называется *интегрирующим множителем* уравнения (73). Умножая на нее обе части уравнения (73), имеем:

$$\left[e^{\int p(x)\, dx} y \right]' = q(x)\, e^{\int p(x)\, dx}, \tag{91}$$

поэтому

$$e^{\int p(x)\,dx} y = \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx + C. \tag{92}$$

Разрешая относительно y, снова получим формулу (87).

Общее решение (87) можно записать в форме Коши:

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} dx \right], \tag{93}$$

где y_0 — произвольно, а x_0 — фиксированное число из интервала (a, b).

Формула (93) при фиксированном y_0 дает решение линейного уравнения (73) с начальными данными x_0, y_0. Из формул (79) и (93) следует, что линейное уравнение имеет две особенности в отношении задачи Коши:

1) ставя задачу Коши, начальное значение y_0 можно задавать произвольно;

2) решение задачи Коши определено при всех значениях x из интервала непрерывности коэффициента $p(x)$ и правой части $q(x)$.

Из формул (79) и (93) видно также, что *всякое решение задачи Коши для линейного уравнения является непрерывно дифференцируемой функцией как независимой переменной x, так и начальных данных x_0 и y_0.*

Пример 1. Пусть дано однородное линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y = 0. \tag{94}$$

Его коэффициент $p(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывен в интервале $(-1,1)$. Общим решением уравнения (94) в области

$$-1 < x < 1, \quad |y| < +\infty, \tag{95}$$

согласно формуле (78), будет

$$y = Ce^{-\sqrt{1-x^2}}. \tag{96}$$

Полупрямые $x = \pm 1\ (y \neq 0)$ являются особыми решениями уравнения (94).

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$(1+x^2)\,y' + xy = 0 \tag{97}$$

и выделить решение, проходящее через точку (0,2).

Пользуясь формулой (78), находим:

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} \tag{98}$$

или (так как $e^{\mu \ln x} = e^{\ln x^{\mu}} = x^{\mu}$)

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{99}$$

Найдем решение поставленной задачи Коши. Подставляя начальные данные в общее решение (99), имеем $2 = C$, так что искомым решением будет

$$y = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{100}$$

Это же решение получается сразу, если воспользоваться формулой (79). Полагая в ней $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, имеем:

$$y = 2e^{-\int\limits_0^x \frac{x\,dx}{1+x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{101}$$

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y' - \frac{2x}{1-x^2} y = 0. \tag{102}$$

Его коэффициент $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ непрерывен при всех x, кроме $x = \pm 1$. Интегрируя уравнение (102), получаем:

$$y = \frac{C}{1-x^2}. \tag{103}$$

Это есть общее решение уравнения (102) в каждой из областей

$$\left.\begin{array}{ll} -\infty < x < -1, & |y| < +\infty; \\ -1 < x < 1, & |y| < +\infty; \\ 1 < x < +\infty, & |y| < +\infty. \end{array}\right\} \tag{104}$$

При $x \to \pm 1$ каждое решение, кроме $y = 0\ (x \neq \pm 1)$, обращается в бесконечность.

Пример 4. Для уравнения

$$y' + \frac{2x}{1-x^2} y = 0 \tag{105}$$

общим решением будет

$$y = C(1-x^2). \tag{106}$$

Здесь при $x \to \pm 1$ всякое решение имеет конечный предел (равный нулю). Но мы не можем задавать начальное значение искомой функции y при $x = \pm 1$ произвольно: оно должно быть равно нулю. При этом существует бесчисленное множество решений, а именно: все интегральные кривые примыкают к точке $(1, 0)$. То же самое имеет место и для точки $(-1, 0)$.

Пример 5. Общим решением уравнения

$$xy' - \sin x \cdot y = 0 \tag{107}$$

будет

$$y = Ce^{\int \frac{\sin x}{x} dx}, \tag{108}$$

или (в форме Коши)

$$y = y_0 e^{\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x} dx} \quad (x_0 = 0). \tag{109}$$

Уравнение вида

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (110)$$

всегда приводится к линейному с неизвестной функцией y, если коэффициент при dy не зависит от y, а коэффициент при dx зависит от y линейно.

Пример 6. Проинтегрировать уравнение

$$(y \sin x - 1)\,dx + \cos x\,dy = 0 \qquad (111)$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через начало координат.

Приводя уравнение (111) к линейному

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x}\,y = \frac{1}{\cos x} \qquad (112)$$

и пользуясь формулой общего решения (87), имеем:

$$y = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}\left[C + \int \frac{1}{\cos x}\,e^{\int \frac{\sin x}{\cos x}dx}\,dx\right], \qquad (113)$$

или

$$y = C\cos x + \sin x. \qquad (114)$$

Это же общее решение легко находится и при помощи интегрирующего множителя. Имеем:

$$\mu = \frac{1}{\cos x}, \quad \left(\frac{1}{\cos x}\,y\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{1}{\cos x}\,y = \operatorname{tg} x + C,$$

$$y = \sin x + C\cos x. \qquad (115)$$

Полагая в общем решении (114) $x = 0$, $y = 0$, найдем $C = 0$, так что искомой интегральной кривой будет

$$y = \sin x. \qquad (116)$$

Это же решение можно получить, пользуясь формулой (93). Полагая в ней $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, имеем:

$$y = e^{-\int\limits_0^x \frac{\sin x}{\cos x}dx}\int\limits_0^x \frac{1}{\cos x}\,e^{\int\limits_0^x \frac{\sin x}{\cos x}dx}\,dx = \sin x. \qquad (117)$$

Пример 7. Проинтегрировать уравнение

$$(1 + y^2)\,dx + (xy + 1)\,dy = 0. \qquad (118)$$

Это уравнение приводится к линейному с неизвестной функцией x от независимой переменной y:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{y}{1 + y^2}\,x = -\frac{1}{1 + y^2}. \qquad (119)$$

Интегрируя его, имеем:

$$x = e^{-\int \frac{y}{1+y^2}dy}\left[C - \int \frac{1}{1 + y^2}\,e^{\int \frac{y}{1+y^2}dy}\,dy\right], \qquad (120)$$

или

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left[C-\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right]. \tag{121}$$

Пример 8. Найти y из уравнения

$$xy=3\int_0^x y\,dx. \tag{122}$$

Дифференцируем по x обе части уравнения (122), считая $y=y(x)$. Получим

$$y+xy'=3y, \tag{123}$$

или

$$xy'-2y=0, \tag{124}$$

откуда

$$y=Cx^2. \tag{125}$$

17. Уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^n, \tag{126}$$

где n — любое вещественное число, отличное от нуля и единицы, называется *уравнением Бернулли*. Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b). Выясним, пользуясь теоремой Пикара, вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши.

Перепишем уравнение Бернулли в нормальной форме:

$$y'=-p(x)y+q(x)y^n\equiv f(x, y). \tag{127}$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-p(x)+nq(x)y^{n-1}. \tag{128}$$

Из (127) и (128) видно, что выполнение условий теоремы Пикара в окрестности начальной точки (x_0, y_0) существенно зависит от выбора y_0 и от величины показателя n.

Если $y_0\neq 0$ и функция y^n определена при $y=y_0$, то в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), где x_0 — любое число из интервала (a, b), выполняются оба условия теоремы Пикара, и, следовательно, через эту точку проходит одна, и только одна, интегральная кривая уравнения (126).

То же самое имеет место, если $y_0=0$ и показатель n больше единицы. В этом случае единственным решением задачи Коши будет, очевидно, отрезок (a, b) оси $Ox: y=0$ $(a<x<b)$.

Если же $y_0=0$, а показатель n меньше единицы, то $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность в точке (x_0, y_0), и единственность решения задачи Коши в этой точке не гарантируется. Отсюда следует, что $y=0$ $(a<x<b)$ может оказаться особым решением.

Уравнение Бернулли всегда интегрируется в квадратурах, ибо оно делением обеих частей на y^n и подстановкой

$$y^{1-n}=z, \tag{129}$$

где z — новая неизвестная функция, приводится к линейному уравнению

$$z'+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x).$$

Общий интеграл уравнения Бернулли будет иметь вид

$$y^{1-n}=A(x)C+B(x).$$

При делении на y^n мы могли потерять решение $y=0$, если $n>0$. Это решение является частным, если $n>1$, и особым, если $0<n<1$ (почему?).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'-y=(1+x)y^2. \tag{130}$$

Деля обе части на y^2, имеем:

$$y^{-2}y'-y^{-1}=1+x. \tag{131}$$

Положим

$$y^{-1}=z. \tag{132}$$

Тогда

$$-y^{-2}y'=z'. \tag{133}$$

Умножая обе части уравнения (131) на (-1) и выполняя подстановку (132), придем к линейному уравнению

$$z'+z=-1-x. \tag{134}$$

Его общим решением будет

$$z=Ce^{-x}-x. \tag{135}$$

Поэтому

$$y=\frac{1}{Ce^{-x}-x}. \tag{136}$$

Решение $y=0$ — частное (почему?).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y'-\frac{3}{2x}y=\frac{3}{2}xy^{\frac{1}{3}} \tag{137}$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1,0).

Деля обе части уравнения (137) на $y^{\frac{1}{3}}$ и выполняя подстановку

$$y^{\frac{2}{3}}=z, \tag{138}$$

получим

$$z'-\frac{1}{x}z=x, \tag{139}$$

откуда

$$z = Cx + x^2, \tag{140}$$

и, следовательно,

$$y^{\frac{2}{3}} = Cx + x^2. \tag{141}$$

Решения $y = 0$ $(x \neq 0)$ — особые (почему?).

Через точку (1,0) проходят две интегральные кривые

$$y^{\frac{2}{3}} = -x + x^2 \text{ и } y = 0\ (0 < x < +\infty), \tag{142}$$

а также комбинации их *.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{\sqrt{y} - y} x = -\frac{1}{\sqrt{y} - y} x^2. \tag{143}$$

Это уравнение Бернулли с неизвестной функцией x от независимой переменной y. Деля обе части его на x^2 и полагая $\frac{1}{x} = z$, получим:

$$z' + \frac{1}{\sqrt{y} - y} z = \frac{1}{\sqrt{y} - y}. \tag{144}$$

Интегрируя (полезно заметить, что $z_1 = 1$ — частное решение), находим (п. 16, теорема):

$$z = C\left(1 - \sqrt{y}\right)^2 + 1. \tag{145}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x} = C\left(1 - \sqrt{y}\right)^2 + 1. \tag{146}$$

Решения $x = 0$ $(y \neq 0,\ y \neq 1)$ — частные.

18. Уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy + P(x, y)(xdy - ydx) = 0, \tag{147}$$

в котором M и N суть однородные функции одной и той же степени m, а P — однородная функция степени l $(l \neq m - 1)$, называется *уравнением Дарбу*. Уравнение Дарбу всегда интегрируется в квадратурах, ибо оно при помощи подстановки

$$y = zx, \tag{148}$$

где z — новая неизвестная функция, приводится к уравнению Бернулли с неизвестной функцией x от независимой переменной z, причем последнее будет линейным, если $l = m - 2$, и уравнением с разделяющимися переменными, если $N \equiv 0$.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$\left(\sqrt{\frac{y}{x}} - y\right)dx + (x - 1)\,dy = 0. \tag{149}$$

---

* См. сноску на стр. 31.

Это уравнение можно попытаться привести к виду уравнения Дарбу, ибо его левая часть содержит выражение $xdy - ydx$. В самом деле, имеем

$$\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx - dy + xdy - ydx = 0. \tag{150}$$

Получили уравнение Дарбу ($m=0$, $l=0$).

Подстановкой $y = zx$ уравнение (150) можно привести к уравнению Бернулли с неизвестной функцией x от независимой переменной z. Имеем:

$$dy = zdx + xdz; \quad xdy - ydx = x^2dz. \tag{151}$$

Поэтому, выполняя в уравнении (150) подстановку $y = zx$, получим:

$$(\sqrt{z} - z)\,dx + (-x + x^2)\,dz = 0. \tag{152}$$

Приведем это уравнение к уравнению Бернулли с неизвестной функцией x:

$$\frac{dx}{dz} - \frac{1}{\sqrt{z} - z}\,x = -\frac{1}{\sqrt{z} - z}\,x^2\;(\sqrt{z} - z = 0?). \tag{153}$$

Интегрируя уравнение (153), найдем (п. **17**, пример 3):

$$\frac{1}{x} = C\,(1 - \sqrt{z})^2 + 1. \tag{154}$$

Возвращаясь к переменной y, получим:

$$\frac{1}{x} = C\left(1 - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 + 1. \tag{155}$$

Из уравнения $\sqrt{z} - z = 0$ имеем $z_1 = 0$, $z_2 = 1$. Подставляя эти значения z в формулу $y = zx$, получим, что уравнение (149) имеет решения $y = 0\,(x \neq 0)$, $y = x\,(x \neq 1)$, из которых первые два — о с о б ы е, вторые — ч а с т н ы е.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x\,(xdx + ydy) + xdy - ydx = 0. \tag{156}$$

Это есть уравнение Дарбу ($m = 2$, $l = 0$). Выполняя в нем подстановку $y = zx$ и сокращая на x^2, получим уравнение

$$(1 + z^2)\,dx + (zx + 1)\,dz = 0, \tag{157}$$

приводящееся к линейному относительно x (чего и следовало ожидать, ибо $l = m - 2$). Интегрируя его, найдем (п. **16**, пример 7):

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}\left[C - \ln\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right)\right]. \tag{158}$$

Возвращаясь к переменной y, получим общий интеграл уравнения (156) в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{x^2 + y^2} + \ln\frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = C \quad (x > 0),\\ &-\sqrt{x^2 + y^2} + \ln\frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = C \quad (x < 0). \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

Полуоси оси $Oy: x = 0$ ($y \neq 0$) тоже являются решениями уравнения (156). Эти решения — ч а с т н ы е.

19. Уравнение вида

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{160}$$

где правая часть является квадратичной функцией от y, причем $R(x) \neq 0$, называется *уравнением Риккати*. Будем предполагать, что функции P, Q и R непрерывны в интервале $(a, b)(a \geqslant -\infty, b \leqslant +\infty)$. Тогда через каждую точку полосы

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \tag{161}$$

так же как и в случае линейного уравнения, проходит одна, и только одна, интегральная кривая (п. **6**, пример 1). Но, в отличие от линейного уравнения, решение уравнения Риккати в общем случае определено не во всем интервале (a, b), а лишь в некоторой окрестности начального значения x_0.

Всякое решение уравнения Риккати является частным, так что особых решений уравнение Риккати не имеет.

Уравнение Риккати сохраняет свой вид при любой замене $x = \varphi(t)$ независимой переменной и при любой дробно-линейной замене искомой функции

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad a < x < b). \tag{162}$$

Пользуясь соответствующими линейными заменами искомой функции, уравнение Риккати всегда можно привести к *каноническому виду*

$$y' = \pm y^2 + R(x), \tag{163}$$

в котором коэффициент при первой степени y отсутствует, а коэффициент при y^2 равен ± 1 (Матвеев. Методы интегрирования, п. **46**).

Уравнение Риккати, в отличие от ранее рассмотренных типов, интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях.

Для того чтобы уравнение Риккати проинтегрировать в квадратурах, достаточно знать лишь одно частное решение его (в виде элементарной функции), ибо если y_1 есть это решение, то подстановкой

$$y = y_1 + \frac{1}{z}, \tag{164}$$

где z — новая неизвестная функция, оно приводится к линейному уравнению

$$z' + [2P(x)y_1 + Q(x)]z = -P(x).$$

Отсюда следует, что общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от C:

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)}. \tag{165}$$

Уравнения Риккати вида

$$y' = \frac{A}{x^2} y^2 + \frac{B}{x} y + C \tag{166}$$

и

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x} y + \frac{C}{x^2}, \tag{167}$$

где A, B и C — постоянные числа, всегда интегрируются в квадратурах, ибо первое из них есть однородное, а второе — обобщенное однородное ($k = -1$). Интегрирование уравнения (167) при условии, что $(B+1)^2 \geqslant 4\,AC$, может быть приведено к интегрированию линейного уравнения, ибо в этом случае оно имеет частное решение вида

$$y_1 = \frac{a}{x}, \tag{168}$$

где a — некоторое постоянное число, определяемое подстановкой (168) в уравнение (167).

Уравнение Риккати вида

$$y' + Ay^2 = Bx^m, \tag{169}$$

где A, B и m — постоянные числа, называется *специальным уравнением Риккати*. При $m = 0$ и $m = -2$ оно интегрируется в элементарных функциях (почему?). Уравнение (169) интегрируется в элементарных функциях также при всех m, для которых

$$\frac{m}{2m+4} = k, \tag{170}$$

где k — целое число, ибо при этом условии его можно преобразовать к такому виду, в котором показатель m равен нулю (см. Степанов, стр. 51—55).

Если показатель m не равен ни нулю, ни —2 и величина (170) не является целым числом, то, как показал Лиувилль, специальное уравнение Риккати не интегрируется в конечном виде.

Пример 1. Уравнение

$$y' = x^2 + y^2 \tag{171}$$

не интегрируется в конечном виде, так как в этом случае число $\frac{m}{2m+4}$ равно $\frac{1}{4}$, т. е. не является целым числом.

Специальное уравнение Риккати (169), *в случае когда показатель m удовлетворяет указанному выше условию интегрируемости, причем $m \neq 0$, $m \neq -2$, всегда можно* *путем соответствующих преобразований независимой переменной и искомой функции привести к уравнению вида*

$$xy' - \frac{1}{2}y + ay^2 = bx, \tag{172}$$

которое легко интегрируется, ибо, положив $y = z\sqrt{x}$, где z — новая неизвестная функция, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Действительно, сделав в уравнении (169),

$$y' + Ay^2 = Bx^m \left(m = \frac{4k}{1-2k} \right),$$

замену искомой функции и независимой переменной по формулам

$$y = \frac{z}{x}, \quad x^{m+2} = t, \tag{173}$$

где z — новая искомая функция от независимой переменной t, получим уравнение вида

$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t, \tag{174}$$

где

$$\alpha = k - \frac{1}{2}. \tag{175}$$

Уравнение (174) приводится к уравнению вида (172) при помощи последовательного применения указываемых ниже подстановок I или II, которые соответственно увеличивают или уменьшают число α на единицу.

I. Подстановка

$$z = \frac{t}{a+u}, \quad a = \frac{1+\alpha}{\gamma} \tag{176}$$

приводит уравнение (174) к виду

$$tu' + (\alpha + 1)u + \gamma u^2 = \beta t. \tag{177}$$

II. Подстановка

$$z = a + \frac{t}{u}, \quad a = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{178}$$

приводит уравнение (174) к виду

$$tu' + (\alpha - 1)u + \gamma u^2 = \beta t. \tag{179}$$

Пример 2. Проинтегрируем изложенным способом уравнение

$$y' = y^2 + x^{-4}. \tag{180}$$

Выполняя подстановки $y = \frac{z}{x}$, $x^{-2} = t$, получим

$$tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t. \tag{181}$$

Чтобы привести это уравнение к виду (172), нужно применить один раз подстановку II, т. е.

$$z = -1 + \frac{t}{u}, \tag{182}$$

после чего будем иметь

$$tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t. \tag{183}$$

Это уравнение вида (172). Полагая $u = v\sqrt{t}$, получим

$$2\sqrt{t}v' = 1 + v^2, \tag{184}$$

откуда

$$v = \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C)\left(-C - \frac{\pi}{2} < \sqrt{t} < -C + \frac{\pi}{2}\right). \tag{185}$$

Следовательно,

$$u = \sqrt{t}\operatorname{tg}(\sqrt{t} + C), \quad z = -1 + \sqrt{t}\operatorname{ctg}(\sqrt{t} + C). \tag{186}$$

Поэтому общим решением уравнения (180) будет

$$y = \frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}. \tag{187}$$

Уравнение Риккати может быть проинтегрировано путем предварительного сведения его к однородному линейному уравнению второго порядка и применения общих методов интегрирования последнего (см. гл VI, § 6).

Свойства решений уравнения Риккати тесно связаны со свойствами решений соответствующего однородного линейного уравнения второго порядка.

Интегрирование рассмотренных в пунктах **17—19** уравнений Бернулли, Дарбу и Риккати (когда известно одно частное решение его) приводилось к интегрированию линейного уравнения. В следующем пункте рассматривается новый тип уравнений, к которому удается привести большое число уравнений, как изученных в предыдущих пунктах, так и совершенно новых.

20. Если левая часть уравнения

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{188}$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$ от независимых переменных x и y, то оно называется *уравнением в полных дифференциалах*. Его общий интеграл имеет вид

$$U(x, y) = C. \tag{189}$$

Особых решений нет.

Признак уравнения в полных дифференциалах устанавливается следующей теоремой.

Теорема. *Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ в некоторой односвязной области D, то для того, чтобы уравнение* (188) *было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{190}$$

При выполнении этого условия общий интеграл уравнения (188) можно записать в одном из двух видов:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C \tag{191}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy = C, \tag{192}$$

где (x_0, y_0) — любая фиксированная точка из области D. Числа x_0 и y_0 нужно выбирать так, чтобы вычисления были как можно проще.

Пример 1. Пусть дано уравнение

$$(2xy - 1)\,dx + (3y^2 + x^2)\,dy = 0. \tag{193}$$

Это уравнение в полных дифференциалах, ибо условие (190) выполнено. Найдем общий интеграл уравнения (193), пользуясь формулой (191). Полагая $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, имеем:

$$\int_0^x (2xy - 1)\,dx + \int_0^y 3y^2 dy = C,$$

или

$$x^2 y - x + y^3 = C. \tag{194}$$

На практике во многих случаях общий интеграл уравнения в полных дифференциалах может быть найден проще следующим образом. Искомая функция $U(x, y)$ должна удовлетворять двум соотношениям:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \tag{195}$$

Удовлетворяя первому из них, имеем:

$$U(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \varphi(y), \tag{196}$$

где интеграл справа берется в предположении, что y фиксировано, т. е. выполняется частная квадратура по x, а $\varphi(y)$ — произвольная функция от y, которую мы предполагаем дифференцируемой. Дифференцируя обе части равенства (196) по y и приравнивая производную левой части $\frac{\partial U}{\partial y}$ функции $N(x, y)$, получим

$$\varphi'(y) = \omega(y), \tag{197}$$

откуда

$$\varphi(y) = \int \omega(y)\,dy. \tag{198}$$

Следовательно, равенство

$$\int M(x, y)\,dx + \int \omega(y)\,dy = C \tag{199}$$

будет общим интегралом уравнения (188).

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(\frac{2x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + y - 1\right)dx + \left(-\frac{x^2}{y^2} - \frac{2y}{x} + x + 1\right)dy = 0. \tag{200}$$

Имеем:

$$U = \int\left(\frac{2x}{y} + \frac{y^2}{x^2} + y - 1\right)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} + xy - x + \varphi(y);$$

$$-\frac{x^2}{y^2} - \frac{2y}{x} + x + \varphi'(y) = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{2y}{x} + x + 1; \tag{201}$$

$$\varphi'(y) = 1, \quad \varphi(y) = y.$$

Следовательно,

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} + xy - x + y = C \tag{202}$$

есть общий интеграл уравнения (200).

Решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, принадлежащими области D, и такими, что $M^2(x_0, y_0) + N^2(x_0, y_0) \neq 0$, дается одной из формул:

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = 0 \tag{203}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)\,dy = 0 \tag{204}$$

(почему?). Это решение единственно.

Пример 3. Найти интегральную кривую уравнения (193), проходящую через начало координат.

Так как $M(0, 0) = -1 \neq 0$, то формула

$$\int_{0}^{x} (2xy - 1)\,dx + \int_{0}^{y} 3y^2 dy = 0 \tag{205}$$

или

$$x^2y - x + y^3 = 0 \tag{206}$$

дает искомое решение. А именно: равенство (206) определяет x как функцию от y, $x = x(y)$, обладающую свойством $x(0) = 0$ и удовлетворяющую уравнению (193). Эта функция имеет вид:

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^4}}{2y}. \tag{207}$$

Других решений нет.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$x(y^2 + 1)\,dx + (x^2y + 2y^3)\,dy = 0, \tag{208}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{209}$$

Здесь точка (0, 0) принадлежит области D, но $M(0, 0) = 0$ и $N(0, 0) = 0$. Поэтому нет гарантии, что формулы (191) и (192) дают искомое решение. Из формулы общего интеграла

$$x^2(y^2 + 1) + y^4 = C, \tag{210}$$

[которая содержит в себе все решения уравнения (208)] видно, что поставленная задача Коши не имеет решения.

21. Во многих случаях, когда уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{211}$$

не является уравнением в полных дифференциалах, удается найти такую функцию $\mu = \mu(x, y)$, что

$$\mu(M\,dx + N\,dy) = 0 \tag{212}$$

есть уравнение в полных дифференциалах. Функция μ называется *интегрирующим множителем уравнения* (211). Если уравнение (211) уже есть уравнение в полных дифференциалах, то полагают $\mu = 1$.

Ниже будет доказано, что при некоторых предположениях относительно функций M и N интегрирующий множитель всегда существует. Но он далеко не всегда выражается в конечном виде.

Знание интегрирующего множителя в виде элементарной функции дает возможность получить общий интеграл уравнения (211). Для этого достаточно перейти от уравнения (211) к уравнению (212) и применить к последнему один из методов п. **20**.

Кривые, в точках которых μ обращается в нуль или в бесконечность, могут оказаться соответственно п о с т о р о н н и м и, или о с о б ы м и, решениями уравнения (211).

Предположим, что μ есть непрерывно дифференцируемая функция от x и y. Тогда из тождества

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \tag{213}$$

следует, что μ является решением следующего уравнения с частными производными первого порядка:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{214}$$

Найдем условие, при котором это уравнение имеет решение вида $\mu = \mu(\omega)$, где $\omega = \omega(x, y)$ — заданная функция от x и y. Подставляя функцию $\mu = \mu(\omega)$ в уравнение (214) и принимая во внимание, что $\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$, получаем

$$\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x} - M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{215}$$

Отсюда ясно, что если

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega), \tag{216}$$

т. е. левая часть является функцией только от ω, то существует интегрирующий множитель $\mu = \mu(\omega)$, который находится из уравнения

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \psi(\omega)\,\mu \tag{217}$$

и, следовательно, имеет вид

$$\mu = e^{\int\psi(\omega)\,d\omega} \quad (C = 1). \tag{218}$$

Условие (216) является необходимым и достаточным для того, чтобы уравнение (211) имело $\mu = \mu[\omega(x, y)]$.

На практике нужно попытаться подобрать функцию $\omega = \omega(x, y)$ так, чтобы выполнялось условие (216), затем подставить функцию $\psi(\omega)$ в формулу (218) и, выполнив вычисление, заменить ω на $\omega(x, y)$. При подборе ω нужно начинать с простейших частных случаев: $\omega = x$ и $\omega = y$. В этих случаях имеем соответственно:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x) \quad \left(\mu = e^{\int\psi(x)\,dx}\right) \tag{219}$$

и

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y) \quad \left(\mu = e^{\int\psi(y)\,dy}\right). \tag{220}$$

Из формулы (219) следует, в частности, что среди всех уравнений вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{221}$$

только линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{222}$$

имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, причем

$$\mu=e^{\int p(x)\,dx} \tag{223}$$

(ср. п. **16**).

Из ранее рассмотренных типов уравнений интегрирующий множитель имеет также уравнение с разделяющимися переменными и однородное уравнение.

Уравнение с разделяющимися переменными

$$m(x)\,n(y)\,dx+m_1(x)\,n_1(y)\,dy=0, \tag{224}$$

очевидно, имеет интегрирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{n(y)\cdot m_1(x)}. \tag{225}$$

Однородное уравнение

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0 \tag{226}$$

имеет интегрирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{Mx+Ny}, \tag{227}$$

если только $Mx+Ny\neq 0$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y(1+xy)\,dx+\left(\frac{1}{2}x^2y+y+1\right)dy=0. \tag{228}$$

Здесь

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=1+xy. \tag{229}$$

Применяя формулы (219) и (220), видим, что не может существовать $\mu=\mu(x)$, в то время как $\mu=\mu(y)$ существует, ибо условие (220), очевидно, выполнено, причем $\psi(y)=-\frac{1}{y}$. Следовательно, $\mu=\frac{1}{y}$.

Умножая обе части уравнения (228) на $\frac{1}{y}$ и пользуясь формулой (191) ($x_0=0$, $y_0=1$), получим:

$$\int_0^x (1+xy)\,dx+\int_1^y \frac{y+1}{y}\,dy=C, \tag{230}$$

или

$$x+\frac{1}{2}x^2y+y+\ln y=C \tag{231}$$

(постоянное число — 1 включено в C).

Пример 2. Найти интегрирующий множитель уравнения

$$\left(-2x+\frac{1}{x+y}\right)dx+\left(-x+y+\frac{1}{x+y}\right)dy=0. \tag{232}$$

Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=1, \tag{233}$$

то ясно, что не существует ни $\mu=\mu(x)$, ни $\mu=\mu(y)$. Попытаемся подобрать ω в виде функции, зависящей от x и y. Условие (216) принимает вид

$$\frac{1}{\left(-x+y+\frac{1}{x+y}\right)\frac{\partial\omega}{\partial x}-\left(-2x+\frac{1}{x+y}\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}}\equiv\psi(\omega). \tag{234}$$

Оно будет выполнено, если взять $\omega=x+y$. Тогда

$$\psi(\omega)=\frac{1}{\omega};\quad \mu=e^{\int\frac{1}{\omega}d\omega}=\omega;\quad \mu=x+y. \tag{235}$$

Пользуясь этим интегрирующим множителем, получим общий интеграл уравнения (232) в виде

$$2x^3+3x^2y-y^3-3x-3y=C. \tag{236}$$

Рассмотрев простейшие случаи нахождения интегрирующего множителя, обратимся к вопросам общей теории интегрирующего множителя. Докажем прежде всего теорему о существовании интегрирующего множителя.

Теорема. *Если в уравнении* (211) *функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в заданной окрестности начальной точки (x_0, y_0) [например, в прямоугольнике R с центром в точке (x_0, y_0)], причем $M^2(x_0, y_0)+N^2(x_0, y_0)\neq 0$, то для этого уравнения существует интегрирующий множитель $\mu=\mu(x, y)$, определенный в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).*

Действительно, при сделанном предположении уравнение (211), согласно сказанному в п. **10**, имеет интеграл $\psi(x, y)$, определенный и непрерывно дифференцируемый в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Это значит, что полный дифференциал функции $\psi(x, y)$ тождественно равен нулю в силу уравнения (211), т. е.

$$d\psi\Big|_{(211)}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right)\Big|_{(211)}\equiv 0. \tag{237}$$

Отсюда следует, что система уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0,\\ Mdx+Ndy=0\end{aligned}\right\} \tag{238}$$

совместна. А тогда

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y}\\ M & N\end{vmatrix}=0. \tag{239}$$

Поэтому

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{N}\equiv\mu(x, y). \tag{240}$$

Функция $\mu(x, y)$ и есть интегрирующий множитель уравнения (211), ибо

$$\mu(Mdx+Ndy)=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=d\psi. \tag{241}$$

Если μ_0 есть интегрирующий множитель уравнения (211), а U_0 — соответствующий ему интеграл, т. е.

$$\mu_0(Mdx+Ndy)=dU_0, \tag{242}$$

то

$$\mu=\mu_0\varphi(U_0), \tag{243}$$

где $\varphi(U_0)$ — любая непрерывная функция от U_0, тоже будет интегрирующим множителем (почему?).

При условии теоремы о существовании интегрирующего множителя все интегрирующие множители уравнения (211) содержатся в формуле (243).

Действительно, пусть μ_1 — некоторый интегрирующий множитель, а U_1 — соответствующий ему интеграл. Тогда имеем два равенства:

$$\left.\begin{aligned}\mu_0(Mdx+Ndy)=dU_0,\\ \mu_1(Mdx+Ndy)=dU_1.\end{aligned}\right\} \tag{244}$$

Деля почленно второе на первое, получаем:

$$\frac{\mu_1}{\mu_0}=\frac{dU_1}{dU_0}. \tag{245}$$

Но $U_1=\Phi(U_0)$ (см. п. **10**). Поэтому

$$\frac{\mu_1}{\mu_0}=\Phi'(U_0), \tag{246}$$

так что $\mu_1=\mu_0\varphi(U_0)$, где $\varphi(U_0)=\Phi'(U_0)$.

Если μ_0 и μ_1 — непрерывно дифференцируемые интегрирующие множители уравнения (211) (определенные в одной и той же области), причем их отношение не равно тождественно постоянной и μ_0 не обращается в нуль, то равенство

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = C, \tag{247}$$

где C — произвольная постоянная, есть общий интеграл этого уравнения, ибо полный дифференциал функции $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ тождественно равен нулю в силу уравнения (211) (почему?). Отсюда следует, что если уравнение (211) уже является уравнением в полных дифференциалах и известен интегрирующий множитель $\mu \not\equiv \text{const}$, то равенство

$$\mu = C \tag{248}$$

есть его общий интеграл. Например, если уравнение (211) есть одновременно однородное и в полных дифференциалах, то

$$Mx + Ny = C \tag{249}$$

является общим интегралом этого уравнения, если только $Mx + Ny \not\equiv \text{const}$.

Пользуясь формулой (243), можно во многих случаях найти интегрирующий множитель уравнения (211), разбивая его левую часть на две группы, для каждой из которых легко находится интегрирующий множитель. Предположим, что в результате этого разбиения уравнение (211) записано так:

$$(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0 \tag{250}$$

и пусть μ_1 и μ_2 суть интегрирующие множители уравнений

$$M_1dx + N_1dy = 0 \text{ и } M_2dx + N_2dy = 0, \tag{251}$$

а U_1 и U_2 — соответствующие им интегралы. Тогда все интегрирующие множители этих уравнений содержатся соответственно в формулах

$$\mu = \mu_1 \varphi(U_1) \text{ и } \mu = \mu_2 \psi(U_2), \tag{252}$$

где φ и ψ — произвольные непрерывные функции. Если мы сможем выбрать последние так, чтобы

$$\mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2), \tag{253}$$

то

$$\mu = \mu_1 \varphi(U_1) = \mu_2 \psi(U_2) \tag{254}$$

будет интегрирующим множителем всего уравнения (211).

Уравнение (250) после умножения обеих частей его на найденный интегрирующий множитель можно переписать в виде

$$\varphi(U_1)\,dU_1 + \psi(U_2)\,dU_2 = 0. \qquad (255)$$

Поэтому общим интегралом уравнения (211) в рассматриваемом случае будет

$$\int \varphi(U_1)\,dU_1 + \int \psi(U_2)\,dU_2 = C. \qquad (256)$$

Отметим, что здесь U_1 и U_2 — интегралы уравнений (251), соответствующие интегрирующим множителям μ_1 и μ_2. Вместо этих интегралов ввиду произвольности функций φ и ψ и зависимости между интегралами одного и того же уравнения можно брать любые другие интегралы. Но тогда общий интеграл данного уравнения (211) нельзя находить по формуле (256). Его нужно искать обычным путем, умножая обе части уравнения (211) на найденный интегрирующий множитель и интегрируя полученное уравнение в полных дифференциалах.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right)dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0. \qquad (257)$$

Разобьем левую часть на две группы:

$$\left(\frac{y}{x}\,dx + dy\right) + \left(3x^2\,dx + \frac{x^3}{y}\,dy\right) = 0. \qquad (258)$$

Интегрирующим множителем уравнения

$$\frac{y}{x}\,dx + dy = 0 \qquad (259)$$

является $\mu_1 = x$, а соответствующим ему интегралом будет $U_1 = xy$. Аналогично для уравнения

$$3x^2\,dx + \frac{x^3}{y}\,dy = 0 \qquad (260)$$

имеем:

$$\mu_2 = y, \quad U_2 = x^3y.$$

Равенство (254) имеет вид

$$x\varphi(xy) = y\psi(x^3y). \qquad (261)$$

Оно будет тождественно выполняться, если положить $\varphi(U_1) = U_1^2$, $\psi(U_2) = U_2$. Поэтому

$$\mu = x^3y^2, \qquad (262)$$

а общим интегралом уравнения (257), в силу (256), будет

$$\int U_1^2\,dU_1 + \int U_2\,dU_2 = C; \quad \frac{U_1^3}{3} + \frac{U_2^2}{2} = C \qquad (263)$$

или

$$\frac{(xy)^3}{3} + \frac{(x^3y)^2}{2} = C. \qquad (264)$$

Пример 4. Найдем интегрирующий множитель уравнения (228). Перепишем его так:

$$\left[y(1 + xy)\,dx + \frac{1}{2}\,x^2y\,dy\right] + (y + 1)\,dy = 0. \qquad (265)$$

Для уравнений

$$y(1+xy)\,dx+\frac{1}{2}x^2y\,dy=0 \text{ и } (y+1)\,dy=0 \tag{266}$$

соответственно имеем:

$$\mu_1=\frac{1}{y},\quad U_1=x+\frac{1}{2}x^2y;\ \mu_2=1,\ U_2=y. \tag{267}$$

Равенство (254) принимает вид

$$\frac{1}{y}\varphi\left(x+\frac{1}{2}x^2y\right)=1\cdot\psi(y). \tag{268}$$

Его правая часть есть функция только от y. Левая часть тоже будет функцией только от y, если положить

$$\varphi\left(x+\frac{1}{2}x^2y\right)=1. \tag{269}$$

Тогда

$$\psi(y)=\frac{1}{y};\ \mu=\frac{1}{y}. \tag{270}$$

Отметим в заключение настоящего параграфа, что наиболее важными из уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной и всегда интегрируемых в конечном виде, являются уравнение с разделяющимися переменными, линейное уравнение и уравнение в полных дифференциалах.

§ 3. ЗАДАЧИ

Здесь и во всех следующих главах (кроме гл. V) задачи даются по задачнику Матвеева. Ответы на задачи, не входящие в этот задачник, приведены в конце настоящей книги.

Матвеев. Сборник задач, №№ **1, 5, 9, 15, 20, 26, 28, 30, 33, 37, 39, 43, 44, 46, 51, 55, 62, 64, 66, 77, 83, 87, 91, 97, 98, 100, 104, 110, 113, 116, 117—119, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 131, 140, 148, 163, 164, 165, 168, 169, 181, 205, 212, 214, 215, 218, 220, 224, 226, 232, 234, 235, 243, 244, 246, 247, 267, 271, 277, 284, 302, 303, 304, 309, 316, 318, 322.**

Проинтегрировать при помощи интегрирующего множителя, найдя последний разбиением уравнения на группы:

1. $\left(\frac{2}{y}+\frac{y}{x^3}\right)dx+\left(\frac{1}{xy}-\frac{2}{x^2}\right)dy=0.$

2. $axdy+bydx+x^my^n(\alpha xdy+\beta ydx)=0$ $(\alpha\beta-b\alpha\neq 0)$. Найти общий интеграл в случае $a\beta-b\alpha=0$.

Проинтегрировать следующие специальные уравнения Риккати:

3. $y'=y^2+x^{-\frac{4}{3}}$. **4.** $y'+y^2=x^{-\frac{8}{3}}$.

ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Уравнение, не разрешенное относительно производной, и его решение. **2.** Поле направлений. **3.** Задача Коши. **4.** Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши. **5.** Частное решение. **6.** Особое решение.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

7. Уравнение n-ой степени. **8.** Уравнения квадратные относительно y'. **9.** Уравнение, содержащее только y'. **10.** Уравнение, не содержащее искомой функции. **11.** Уравнение, не содержащее независимой переменной. **12.** Общая схема интегрирования полного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в случае, когда известно параметрическое представление его. **13.** Уравнение, разрешенное относительно искомой функции или независимой переменной. **14.** Уравнение Лагранжа. **15.** Уравнение Клеро.

§ 3. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИЯХ

16. Задача о траекториях на плоскости в случае декартовых координат. **17.** Случай полярных координат.

§ 4. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования, гл. II, пп. **66—81**.
Степанов, гл. III, §§ 1—3, 4 (стр. 125—129, 132—135), § 5.
Эльсгольц, гл. I, §§ 8, 9.

Дополнительная

Петровский, гл. III, §§ 26, 27.
Степанов, гл. III, § 4 (стр. 129—132).
Г. П. Толстов. Курс математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1957, стр. 185—194.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет следующий общий вид:

$$F(x, y, y')=0. \tag{1}$$

Функция $y=y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в интервале (a, b), называется *решением* уравнения (1), если она обращает уравнение (1) в тождество

$$F[x, y(x), y'(x)] \equiv 0 \qquad (a<x<b). \tag{2}$$

Так как нахождение решений в явном виде представляет большие затруднения, то обычно ограничиваются нахождением решений в неявном виде $\Phi(x, y)=0$ или в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

График решения называется *интегральной* кривой. Из определения решения следует, что все интегральные кривые являются гладкими кривыми.

В случае, когда уравнение (1) разрешимо в элементарных функциях относительно y', так что мы получаем одно или несколько уравнений, разрешенных относительно y':

$$y'=f_k(x, y) \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $f_k(x, y)$ — вещественные функции от x и y, интегрирование уравнения (1) сводится к интегрированию уравнений (3), т. е. к задаче, рассмотренной в гл. I.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'^2-4y=0. \tag{4}$$

Это уравнение распадается на два:

$$y'=2\sqrt{y} \text{ и } y'=-2\sqrt{y}. \tag{5}$$

Первое из них имеет семейство решений

$$y=(x+C)^2 \quad (x\geqslant -C), \tag{6}$$

а второе —

$$y=(x+C)^2 \quad (x\leqslant -C), \tag{7}$$

так что каждая парабола

$$y=(x+C)^2 \tag{8}$$

(рис. 17) является интегральной кривой уравнения (4).

Кроме того, решением уравнения (4) будет $y \equiv 0$ (рис. 14).

Уравнение (4) имеет также бесчисленное множество решений, склеенных из отрезков указанных выше решений (при этом, согласно определению решения, склеиваемые отрезки в общей точке должны иметь общую касательную). Например, такими решениями будут

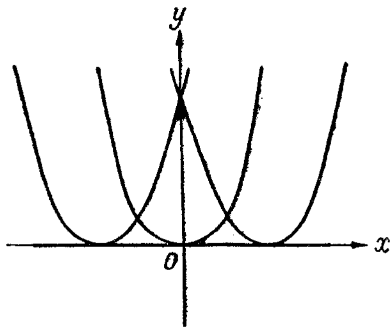

Рис. 17.

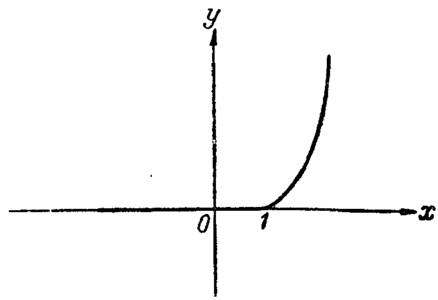

Рис. 18.

$$y=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } x > 1 \end{cases} \tag{9}$$

(рис. 18) и

$$y=\begin{cases} (x+1)^2 & \text{при } x < -1, \\ 0 & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ (x-1)^2 & \text{при } x > 1 \end{cases} \tag{10}$$

(рис. 19).

2. Уравнение (1), так же как и уравнение, разрешенное относительно производной, задает на плоскости (x, y) некоторое *поле направлений*, если через каждую точку (x, y), в которой это уравнение имеет вещественные решения относительно y', провести отрезки, образующие с положительным направлением оси Ox углы, тангенсы которых равны значениям y', найденным из уравнения (1). Чтобы найти направления поля, определяемые уравнением (1) в точке (x_0, y_0), нужно найти все вещественные решения уравнения

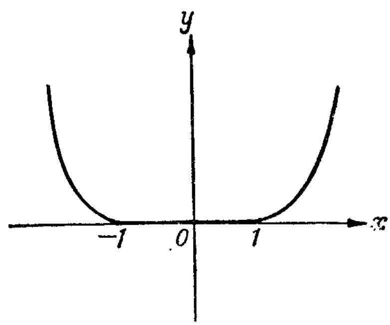

Рис. 19.

$$F(x_0, y_0, y')=0. \tag{11}$$

Пример 1. Уравнение (4) определяет во всякой точке (x_0, y_0), где $y_0 > 0$, два направления поля:

$$y_1'=2\sqrt{y_0} \text{ и } y_2'=-2\sqrt{y_0}. \tag{12}$$

Во всякой точке $(x_0, 0)$, лежащей на оси Ox, оно определяет только одно направление поля:

$$y_1'\big|_{(x,\,0)} = 0. \tag{13}$$

Пример 2. Уравнение

$$y'^3 + 1 = 0 \tag{14}$$

задает в каждой точке (x_0, y_0) только одно направление поля:

$$y'\big|_{(x_0,\,y_0)} = -1. \tag{15}$$

Пример 3. Уравнение

$$y'^2 + 1 = 0 \tag{16}$$

не определяет ни одного направления поля ни в какой точке (x_0, y_0). Такие уравнения в этом курсе не рассматриваются.

Совокупность точек (x, y), в которых уравнение (1) определяет хоть одно направление поля, называется *областью задания* уравнения. Интегральная кривая выделяется среди всевозможных кривых на плоскости (x, y) тем свойством, что в каждой ее точке направление касательной совпадает с одним из направлений поля, определяемых уравнением (1) в этой точке.

3. Задача, в которой ищется интегральная кривая уравнения (1), проходящая через заданную точку (x_0, y_0), называется *задачей Коши*.

Будем говорить, что решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 единственно, если существует такая окрестность точки x_0, что число интегральных кривых, определенных в этой окрестности и проходящих через точку (x_0, y_0), равно числу направлений поля, определяемых уравнением (1) в этой точке, так что по данному направлению проходит одна интегральная кривая. В противном случае говорят, что единственность (решения задачи Коши) нарушена.

Пример 1. Найдем решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$y = 1 \text{ при } x = 0. \tag{17}$$

Воспользуемся формулами (6) и (7). Подставляя в каждую из них начальные данные 0 и 1, имеем $1 = C^2$, откуда $C = \pm 1$, так что искомыми решениями будут параболы

$$\left.\begin{aligned} y &= (x+1)^2, \\ y &= (x-1)^2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(рис. 20). Единственность решения задачи Коши не нарушается, ибо в начальной точке (0, 1) уравнение (4) определяет два направления поля:

$$y_1' = 2, \quad y_2' = -2 \tag{19}$$

и через эту точку проходят две интегральные кривые (18).

Пример 2. Возьмем то же уравнение (4) и поставим следующие начальные условия:

$$y = 0 \text{ при } x = x_0. \tag{20}$$

т. е. будем искать интегральные кривые, проходящие через точку $(x_0, 0)$, лежащую на оси Ox (рис. 21).

Так же, как и выше, найдем, что через точку $(x_0, 0)$ проходит парабола

$$y=(x-x_0)^2. \tag{21}$$

Кроме того, через эту точку проходит решение $y \equiv 0$, а также

$$y=\begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_0, \\ (x-x_0)^2 & \text{при } x > x_0 \end{cases} \tag{22}$$

и

$$y=\begin{cases} (x-x_0)^2 & \text{при } x < x_0, \\ 0 & \text{при } x \geqslant x_0. \end{cases} \tag{23}$$

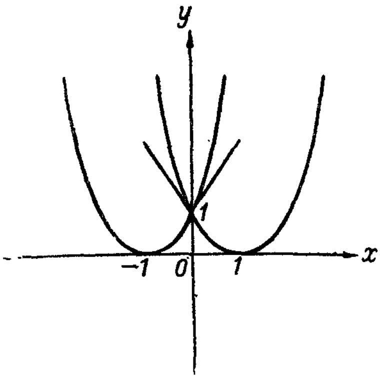

Рис. 20.

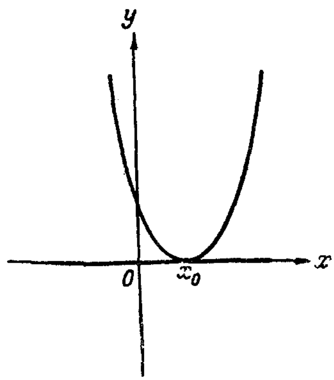

Рис. 21.

Единственность решения задачи Коши в точке $(x_0, 0)$ нарушается, так как в точке $(x_0, 0)$ уравнение (4) определяет только о д н о направление поля:

$$y_1'=0, \tag{24}$$

в то время как через эту точку проходит н е о д н а интегральная кривая.

Пример 3. Найти решение уравнения

$$y'^2=4x, \tag{25}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y=y_0 \text{ при } x=0, \tag{26}$$

т. е. найти интегральные кривые, проходящие через точку $(0, y_0)$, лежащую на оси Oy.

Решая уравнение (25) относительно y', имеем:

$$y'=2x, \quad y'=-2x. \tag{27}$$

Интегрируя эти уравнения, получим два семейства интегральных кривых

$$y=x^2+C; \quad y=-x^2+C \tag{28}$$

(рис. 22). Полагая в них $x=0$, $y=y_0$, найдем $C=y_0$, так что через точку $(0, y_0)$ проходят интегральные кривые

$$y=x^2+y_0; \quad y=-x^2+y_0. \tag{29}$$

Кроме того, через точку $(0, y_0)$ проходят две интегральные кривые, составленные из отрезков этих интегральных кривых:

$$y=\begin{cases} x^2+y_0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ -x^2+y_0 \text{ при } x > 0 \end{cases} \tag{30}$$

и

$$y=\begin{cases} -x^2+y_0 \text{ при } x \leqslant 0, \\ x^2+y_0 \text{ при } x > 0. \end{cases} \tag{31}$$

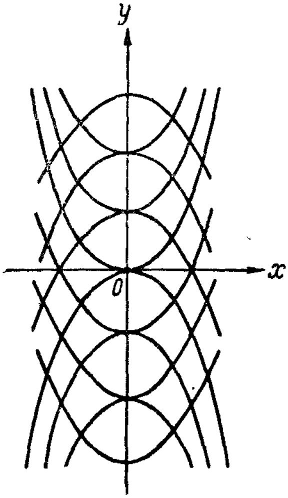

Рис. 22.

Единственность (решения задачи Коши) в точке $(0, y_0)$ нарушается, ибо через нее проходит не одна интегральная кривая, в то время как направление поля в ней только одно:

$$y_1' = 0. \tag{32}$$

Заметим, что каждая точка оси Oy является точкой соприкосновения интегральных кривых семейств (28) (рис. 22).

4. Пусть y_0' есть одно из вещественных решений уравнения (11). Укажем условия, при которых существует только одна интегральная кривая уравнения (1), проходящая через точку (x_0, y_0), и такая, что касательная к ней в точке (x_0, y_0) образует с положительным направлением оси Ox угол α_0, тангенс которого равен y_0'.

Теорема. *Предположим, что левая часть уравнения* (1),

$$F(x, y, y')=0,$$

удовлетворяет следующим трем условиям:

1) *функция $F(x, y, y')$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y_0');*

2) *функция F в точке (x_0, y_0, y_0') обращается в нуль;*

3) *производная $F_{y'}'$ в этой точке не равна нулю.*

Тогда существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения (1), *определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки $x=x_0$, удовлетворяющее начальным условиям*

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0 \tag{33}$$

и такое, что

$$y'(x_0)=y_0'. \tag{34}$$

(Эльсгольц, гл. I, § 9).

Пример 1. Исследуем вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши, рассмотренный в примере 1, п. **3**.

Так как уравнение (4) определяет в начальной точке (0,1) два направления поля (19), то для того, чтобы доказать единственность решения задачи Коши, нужно показать, что существует единственное решение уравнения (4):

$$y'^2 - 4y = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям (17):

$$y' = 1 \text{ при } x = 0,$$

и такое, что $y' = 2$ при $x = 0$ или $y' = -2$ при $x = 0$. Рассмотрим случай $y' = 2$ при $x = 0$.

Проверяя выполнение условий приведенной выше теоремы, видим, что условия „1" и „2" выполнены. Так как

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(0,\,1,\,2)} = 2y'\Big|_{(0,\,1,\,2)} = 4 \neq 0, \tag{35}$$

то условие „3" тоже выполнено. Поэтому существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (17), и такое, что $y' = 2$ при $x = 0$. То же заключение имеет место и в случае $y' = -2$ при $x = 0$. Следовательно, решение задачи Коши для уравнения (4) с начальными условиями (17) существует и единственно.

Предлагаем читателю убедиться, что в примерах 2 и 3 п. **3** условия теоремы не выполнены (какое условие нарушается?).

Пример 2. Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения

$$F(x,\ y,\ y') \equiv (y' - 1)\left(y'^2 - 4y\right) = 0 \tag{36}$$

с начальными условиями

$$y = 0 \text{ при } x = x_0. \tag{37}$$

Уравнение (36) определяет в начальной точке $(x_0,\ 0)$ два направления поля: $y' = 1$ и $y' = 0$.

Исследуем первое направление. В окрестности точки $(x_0,\ 0,\ 1)$ функция $F(x,\ y,\ y')$ удовлетворяет первым двум условиям приведенной выше теоремы. Проверяя третье условие, имеем:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0,\,0,\,1)} = \left[y'^2 - 4y + (y' - 1)\cdot 2y'\right]\Big|_{(x_0,\,0,\,1)} = 1 \neq 0. \tag{38}$$

Следовательно, через точку $(x_0,\ 0)$ по направлению $y' = 1$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Исследуем второе направление ($y' = 0$). В отличие от первого направления, имеем:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{(x_0,\,0,\,0)} = 0. \tag{39}$$

Поэтому через точку $(x_0,\ 0)$ по направлению $y' = 0$ может пройти не одна интегральная кривая.

Существование и единственность решения задачи Коши (36), (37) не гарантируются. Нетрудно убедиться, что единственности и нет. (Найти решение этой задачи Коши и сделать рисунок.)

5. Решение называется *частным*, если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши.

Пример. Каждая из полупарабол (рис. 17)

$$y = (x + C)^2 \quad (y \neq -C) \tag{40}$$

является частным решением уравнения (4):

$$y'^2 - 4y = 0$$

(почему?).

6. Решение называется *особым*, если в каждой точке его нарушается единственность решения задачи Коши.

Пример 1. В примере п. 1 мы показали, что уравнение (4) имеет семейство решений (8):

$$y = (x + C)^2$$

(рис. 17). Кроме того, его решением является ось Ox: $y \equiv 0$. Это решение о с о б о е, ибо в каждой его точке $(x_0, 0)$ нарушается единственность решения задачи Коши, как это показано в примере 2, п. 3.

Так же как и в случае уравнения, разрешенного относительно производной (см. гл. I, п. 9), кривые, подозрительные на особое решение уравнения (1), можно найти как по аналитическому виду левой части, так и по семейству интегральных кривых.

Предполагая, что левая часть уравнения (1) имеет производную по y', составляют систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, y') = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Кривая, получающаяся исключением y' из этой системы, называется *дискриминантной кривой* уравнения (1). Она может оказаться о с о б ы м решением уравнения (1).

Пример 2. Дискриминантной кривой уравнения (4):

$$y'^2 - 4y = 0$$

будет ось Ox: $y \equiv 0$. Она является особым решением.

Пример 3. Рассмотрим уравнение (25):

$$y'^2 = 4x.$$

Здесь дискриминантная кривая $x \equiv 0$ (ось Oy) не будет особым решением (почему?). Она является геометрическим местом т о ч е к п р и к о с н о в е н и я интегральных кривых уравнений (27), на которые распадается уравнение (25) (см. п. 3, пример 3).

Огибающая семейства интегральных кривых

$$y = \varphi(x, C) \text{ или } \Phi(x, y, C) = 0 \tag{42}$$

уравнения (1) является решением этого уравнения и притом **особым** (почему?). Способ нахождения огибающей указан в п. 9 главы I: нужно найти дискриминантную кривую семейства интегральных кривых и проверить, будет ли она огибающей.

Пример 4. Для уравнения (4) дискриминантной кривой семейства интегральных кривых (8) будет ось Ox: $y \equiv 0$. Она, очевидно, является **огибающей** семейства (8).

Пример 5. Рассмотрим снова уравнение (25). Оно имеет два семейства интегральных кривых (28):

$$y = x^2 + C; \quad y = -x^2 + C,$$

которые можно переписать в виде одного семейства

$$(y - x^2 - C)(y + x^2 - C) = 0, \tag{43}$$

или

$$(y - C)^2 - x^4 = 0. \tag{44}$$

Найдем огибающую семейства (44). Дискриминантной кривой этого семейства будет ось Oy:

$$x \equiv 0. \tag{45}$$

Она, очевидно, не является огибающей семейства (44).

Пример 6. Уравнение

$$y = x - \frac{4}{9} y'^2 + \frac{8}{27} y'^3 \tag{46}$$

имеет семейство интегральных кривых*

$$(y - C)^2 = (x - C)^3.$$

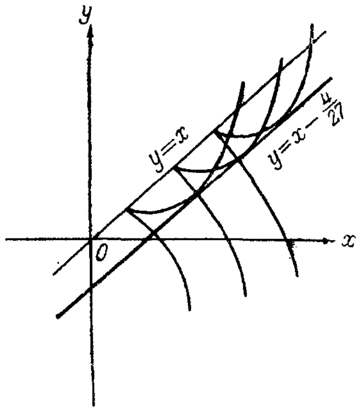

Рис. 23.

Это есть семейство полукубических парабол (рис. 23). Дискриминантная кривая этого **семейства** распадается на две прямые:

$$y = x - \frac{4}{27}; \quad y = x. \tag{47}$$

Первая из них является огибающей, а вторая не будет огибающей: она представляет собой геометрическое место **точек возврата** (и решением не является).

Заметим, что дискриминантная кривая **уравнения** (46) тоже распадается на прямые (47).

Из рассмотренных примеров видно, что *особым решением уравнения* (1) *может быть только дискриминантная кривая* этого уравнения (или семейства интегральных кривых). Дискриминантная кривая (или ее часть) будет особым решением в том случае, когда она (или ее часть) является огибающей семейства интегральных кривых (или части семейства). *Но дискриминантная кривая может быть также геометри-*

* См. п. 14, пример 2.

ческим местом точек возврата интегральных кривых или точек прикосновения интегральных кривых различных ветвей уравнения (1).

Кривые, подозрительные на особое решение, можно обнаружить также в процессе интегрирования данного дифференциального уравнения.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

7. Уравнение вида

$$y'^n + A_1(x, y)\, y'^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x, y)\, y' + A_n(x, y) = 0 \qquad (1)$$

называется *уравнением первого порядка n-ой степени.** Если это уравнение удается разрешить (в элементарных функциях) относительно y':

$$y' = f_k(x, y) \quad (k = 1, 2, \ldots, m \leqslant n), \qquad (2)$$

то задача интегрирования его сводится к интегрированию уравнений (2). Предположим, что для каждого из уравнений (2) найден общий интеграл

$$\psi_k(x, y) = C \quad (k = 1, 2, \ldots, m \leqslant n). \qquad (3)$$

Совокупность общих интегралов (3) будем называть *общим интегралом* уравнения (1). Эту совокупность можно записать и в виде одной формулы

$$[\psi_1(x, y) - C] \cdot [\psi_2(x, y) - C] \ldots [\psi_m(x, y) - C] = 0. \qquad (4)$$

Особым решением уравнения (1) может быть только его дискриминантная кривая.

Если хоть одно из уравнений (2) имеет особые решения, то последние будут особыми решениями и для всего уравнения (1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$2yy'^3 - (4xy + 2y + 1)\, y'^2 + (4xy + 2x + 1)\, y' - 2x = 0. \qquad (5)$$

Разрешая его относительно y', имеем:

$$y' = 1; \quad y' = 2x; \quad y' = \frac{1}{2y}. \qquad (6)$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$y = x + C; \quad y = x^2 + C; \quad y^2 = x + C. \qquad (7)$$

---

* В связи с этим определением уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, называют также *уравнением первого порядка и первой степени.*

Совокупность этих семейств интегральных кривых или

$$(y-x-C)(y-x^2-C)(y^2-x-C)=0 \tag{8}$$

образует общий интеграл уравнения (5). Особых решений нет (почему?).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y'^3-(2\sqrt{y}+y^2)\,y'^2+2y^2\sqrt{y}\,y'=0. \tag{9}$$

Разрешим его относительно y':

$$y'=0;\quad y'=2\sqrt{y};\quad y'=y^2. \tag{10}$$

Проинтегрируем эти уравнения:

$$y=C;\ y=(x+C)^2\ (x\geqslant -C),\ y\equiv 0 \text{ — особое решение};\ \frac{1}{y}=-x+C. \tag{11}$$

Общим интегралом уравнения (9) будет

$$(y-C)\,[y-(x+C)^2]\left(\frac{1}{y}+x-C\right)=0. \tag{12}$$

Решение $y=0$ будет особым (почему?).

8. Уравнение, квадратное относительно y',

$$y'^2+2P(x,\ y)\,y'+Q(x,\ y)=0 \tag{13}$$

задано в области

$$P^2(x,\ y)-Q(x,\ y)\geqslant 0. \tag{14}$$

Разрешая его относительно y', имеем:

$$y'=-P(x,\ y)\pm\sqrt{P^2(x,\ y)-Q(x,\ y)}. \tag{15}$$

Если

$$P^2(x,\ y)-Q(x,\ y)\not\equiv 0, \tag{16}$$

то интегрирование уравнения (13) приводится к интегрированию двух уравнений

$$y'=-P+\sqrt{P^2-Q};\quad y'=-P-\sqrt{P^2-Q}. \tag{17}$$

Дискриминантной кривой уравнения (13) будет

$$P^2(x,\ y)-Q(x,\ y)=0 \tag{18}$$

(почему?). Эта кривая, и только она, может оказаться особым решением уравнения (13).

Заметим, что если уравнения (17) не принадлежат к изученным в гл. I типам уравнений и не приводятся к ним при помощи очевидных подстановок, но данное уравнение (13) легко разрешимо относительно x или y (например, если оно линейно относительно x и y), то его следует интегрировать не как квадратное относительно y', а как уравнение, разрешимое относительно x или y (см. п. 13—15).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'^2-2y'+1-y+x=0. \qquad (19)$$

Оно задано в области

$$y-x\geqslant 0 \qquad (20)$$

(рис. 24). Разрешая уравнение (19) относительно y', имеем:

$$y'=1+\sqrt{y-x};\quad y'=1-\sqrt{y-x}. \qquad (21)$$

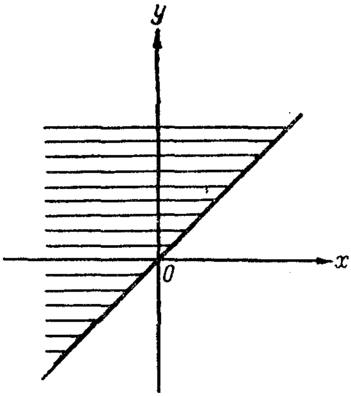

Рис. 24.

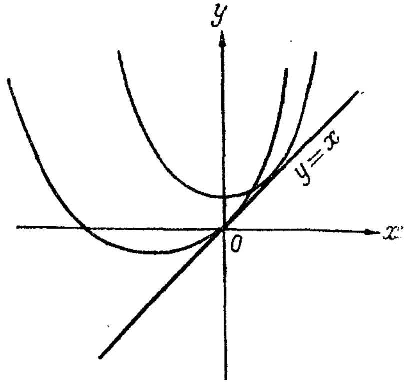

Рис. 25.

Интегрируя эти уравнения, получаем два семейства интегральных кривых:

$$y=x+\frac{(x+C)^2}{4}\quad (x\geqslant -C);\quad y=x+\frac{(x+C)^2}{4}\quad (x\leqslant -C). \qquad (22)$$

Дискриминантная кривая

$$y=x \qquad (23)$$

является особым решением уравнения (19) (почему?). Интегральными кривыми уравнения (19) являются параболы

$$y=x+\frac{(x+C)^2}{4} \qquad (24)$$

и их огибающая (23) (рис. 25).

Пример 2. Для уравнения

$$y'^2+xy'+y=0 \qquad (25)$$

дискриминантная кривая

$$y=-\frac{x^2}{4} \qquad (26)$$

не будет особым решением, так как она не является решением этого уравнения.

9. В этом и двух следующих пунктах рассматриваются неполные уравнения. Если дифференциальное уравнение содержит только y', т. е. имеет вид

$$F(y')=0, \qquad (27)$$

причем оно определяет хоть одно **вещественное** значение y', то можно найти все интегральные кривые этого уравнения без квадратур.

Действительно, пусть

$$y' = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

— вещественные корни уравнения (27), так что

$$F(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Из (28) находим:

$$y = a_k x + C \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{30}$$

откуда

$$a_k = \frac{y - C}{x} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Поэтому уравнение (27) имеет семейство интегральных кривых

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0. \tag{32}$$

Это семейство будем называть *общим интегралом* уравнения (27). Заметим, что общий интеграл (32) получается из дифференциального уравнения (27) простой заменой y' на $\frac{y - C}{x}$.

Если корни уравнения (27) заполняют целый интервал, то как недавно показал Ю. С. Богданов,* уравнение (27) может иметь решения, не содержащиеся в формуле (32).

Пример. Общим интегралом уравнения

$$y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0 \tag{33}$$

будет

$$\left(\frac{y - C}{x}\right)^3 + \left(\frac{y - C}{x}\right)^2 - \frac{y - C}{x} + 1 = 0. \tag{34}$$

10. Рассмотрим уравнение, не содержащее искомой функции

$$F(x, y') = 0. \tag{35}$$

Оно может оказаться разрешимым (в элементарных функциях) относительно y':

$$y' = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

Тогда

$$y = \int f_k(x)\,dx + C \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{37}$$

---

* Ю. С. Богданов. О простейшем неполном дифференциальном уравнении. ДАН БССР, т. V, № 10, 1961.

Кроме того, уравнения (36), а, следовательно, и уравнение (35), могут иметь решения вида

$$x=a, \tag{38}$$

которые могут оказаться особыми. Поэтому уравнение (35) может иметь особые решения вида (38).

Пример 1. Уравнение

$$y'^2-\frac{1}{x}=0 \tag{39}$$

распадается на два:

$$y'=\frac{1}{\sqrt{x}};\quad y'=-\frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{40}$$

Интегрируя их, получаем

$$y=2\sqrt{x}+C;\quad y=-2\sqrt{x}+C \tag{41}$$

и особое решение

$$x=0. \tag{42}$$

Если уравнение (35) не разрешимо относительно y', пытаются найти такие функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, чтобы

$$F[\varphi(t),\ \psi(t)]\equiv 0. \tag{43}$$

Тогда уравнение (35) можно переписать в виде

$$x=\varphi(t),\quad y'=\psi(t). \tag{44}$$

В подобных случаях говорят, что уравнение (35) допускает *параметрическое представление* (44).

Покажем, что если уравнение (35) допускает параметрическое представление (44), то всегда можно найти в квадратурах семейство интегральных кривых в параметрическом виде.

С этой целью воспользуемся *основным соотношением*

$$dy=y'dx. \tag{45}$$

Заменяя в нем y' на $\psi(t)$, а dx на $\varphi'(t)\,dt$, имеем:

$$dy=\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt, \tag{46}$$

откуда

$$y=\int\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt+C. \tag{47}$$

Присоединяя сюда $x=\varphi(t)$, получим искомое семейство интегральных кривых

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\int\psi(t)\,\varphi'(t)\,dt+C,\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

которое будем называть *общим решением* уравнения (35) *в параметрической форме*.

Если существует такое конечное число a, что

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ y'\to+\infty}} F(x,\ y')=0, \tag{49}$$

или

$$\lim_{\substack{x\to a,\\ y'\to-\infty}} F(x,\ y')=0, \tag{50}$$

то прямая

$$x=a \tag{51}$$

является решением уравнения (35). Это решение может оказаться особым.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x=e^{2y'}-y'^2. \tag{52}$$

Так как это уравнение разрешено относительно x, то для получения параметрического представления достаточно задать y' как функцию параметра t.

Положим $y'=t$. Получим

$$x=e^{2t}-t^2, \quad y'=t. \tag{53}$$

Тогда

$$dy=y'dx=2t\,(e^{2t}-t)\,dt;$$

$$y=2\int t\,(e^{2t}-t)\,dt=2\left(\frac{te^{2t}}{2}-\frac{e^{2t}}{4}-\frac{t^3}{3}\right)+C,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{2t}-t^2,\\ y&=e^{2t}\left(t-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}t^3+C \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

будет общим решением уравнения (52) в параметрической форме.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение

$$x=\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{55}$$

Полагая $y'=\operatorname{tg} t$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos^3 t, & y'&=\operatorname{tg} t \ \text{при} \cos t>0,\\ x&=-\cos^3 t, & y'&=\operatorname{tg} t \ \text{при} \cos t<0. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} dy&=-3\sin^2 t\cos t\,dt \quad \text{при} \cos t>0,\\ dy&=3\sin^2 t\cos t\,dt \quad \text{при} \cos t<0. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} y&=-\sin^3 t+C \quad \text{при} \cos t>0,\\ y&=\sin^3 t+C \quad \text{при} \cos t<0. \end{aligned}\right\}.$$

Общим решением уравнения (55) в параметрической форме будет

$$\left.\begin{aligned} x&=\cos^3 t, & y&=-\sin^3 t+C \quad \text{при} \cos t>0,\\ x&=-\cos^3 t, & y&=\sin^3 t+C \quad \text{при} \cos t<0. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Исключая параметр, получим общий интеграл

$$x^{\frac{2}{3}}+(y-C)^{\frac{2}{3}}=1. \tag{59}$$

Кроме того, уравнение (55) имеет решение

$$x\equiv 0, \tag{60}$$

которое будет особым.

11. Уравнение, не содержащее независимой переменной

$$F(y,\ y')=0, \tag{61}$$

в случае, когда оно разрешимо относительно y':

$$y'=f_k(y)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{62}$$

имеет общий интеграл

$$\int\frac{dy}{f_k(y)}=x+C\quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{63}$$

Уравнение (61) может иметь решения вида

$$y=b, \tag{64}$$

где

$$F(b,\ 0)=0. \tag{65}$$

Эти решения могут оказаться особыми.

Если уравнение (61) не разрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление

$$y=\varphi(t),\ y'=\psi(t), \tag{66}$$

то имеем:

$$dy=y'dx;\quad \varphi'(t)\,dt=\psi(t)\,dx. \tag{67}$$

Поэтому уравнение (61) имеет следующее общее решение в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x&=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt+C,\\ y&=\varphi(t). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y=\sqrt{y'^2+1}. \tag{69}$$

Полагая $y'=\operatorname{sh} t$, будем иметь:

$$y=\operatorname{ch} t,\quad y'=\operatorname{sh} t. \tag{70}$$

Тогда

$$dy=y'dx;\quad \operatorname{sh} t\,dt=\operatorname{sh} t\,dx. \tag{71}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} x&=t+C,\\ y&=\operatorname{ch} t. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Исключив параметр t, получим семейство цепных линий (рис. 26)

$$y = \operatorname{ch}(x - C). \tag{73}$$

Полагая в уравнении (69) $y = b$, найдем: $b = 1$, так что прямая

$$y = 1 \tag{74}$$

будет решением уравнения (69). Это решение особое, ибо оно является огибающей семейства (73).

12. Предположим, что уравнение (1):

$$F(x, y, y') = 0$$

допускает параметрическое представление

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v),$$
$$y' = \chi(u, v), \tag{75}$$

где u и v — параметры. Тогда его интегрирование можно привести к интегрированию уравнения, разрешенного относительно производной, связывающего параметры u и v.

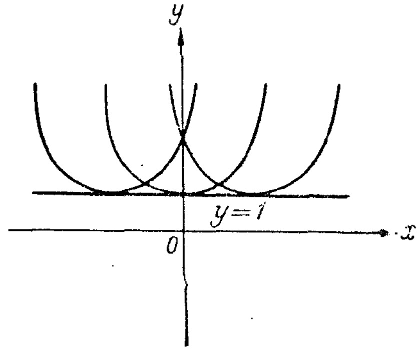

Рис. 26.

В самом деле, пользуясь основным соотношением $dy = y'dx$, имеем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right) \tag{76}$$

или

$$\frac{dv}{du} = f(u, v). \tag{77}$$

Предположим, что для уравнения (77) найдено общее решение

$$v = w(u, C). \tag{78}$$

Тогда уравнение (1) имеет следующее *общее решение в параметрической форме*:

$$x = \varphi[u, w(u, C)], \quad y = \psi[u, w(u, C)]. \tag{79}$$

Если уравнение (77) имеет особое решение

$$v = \gamma(u), \tag{80}$$

то

$$x = \varphi[u, \gamma(u)], \quad y = \psi[u, \gamma(u)] \tag{81}$$

может быть особым решением уравнения (1).

На деле возможность применения изложенной схемы интегрирования уравнения (1) ограничена двумя трудностями: во-первых, параметризацией уравнения (1), во-вторых, интегрированием уравнения (77). В п. **13—15** рассматриваются частные случаи уравнения (1), в которых эти трудности частично или полностью преодолеваются.

13. Если уравнение (1) разрешено (или разрешимо) относительно y или x, то параметризация его не представляет затруднений.

Пусть уравнение (1) имеет вид

$$y=\varphi(x, y'). \tag{82}$$

Тогда за параметры u и v можно взять x и y':

$$x=x, \quad y=\varphi(x, y'), \quad y'=y'. \tag{83}$$

Будем (здесь и в дальнейшем) обозначать производную y', рассматриваемую как параметр, буквой p. Тогда (опуская равенство $x=x$) можно переписать (83) в виде

$$y=\varphi(x, p), \quad y'=p. \tag{84}$$

Далее, пользуясь основным соотношением $dy=y'dx$, имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial p}dp=pdx. \tag{85}$$

Предположим, что для уравнения (85) можно найти общее решение

$$p=p(x, C), \quad \text{или} \quad x=x(p, C). \tag{86}$$

Тогда, подставляя (86) в $y=\varphi(x, p)$, получим для уравнения (82) соответственно *общее решение*

$$y=\varphi[x, p(x, C)], \tag{87}$$

или *общее решение в параметрической форме*:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(p, C),\\ y&=\varphi[x(p, C), p]. \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Если уравнение (85) имеет особое решение

$$p=\gamma(x), \tag{89}$$

то

$$y=\varphi[x, \gamma(x)] \tag{90}$$

может быть особым решением уравнения (82).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'^2-3xy'+3x^2-y=0. \tag{91}$$

Оно, очевидно, разрешимо относительно y:

$$y=y'^2-3xy'+3x^2. \tag{92}$$

Положим $y' = p$. Тогда

$$y = p^2 - 3xp + 3x^2, \quad y' = p. \tag{93}$$

Пользуясь основным соотношением $dy = y'dx$, имеем:

$$2pdp - 3pdx - 3xdp + 6xdx = pdx, \tag{94}$$

или

$$(2p - 3x)\,dp + (-4p + 6x)\,dx = 0. \tag{95}$$

Это уравнение распадается на два:

$$dp - 2dx = 0; \quad 2p - 3x = 0. \tag{96}$$

Первое из них дифференциальное, а второе *конечное*. Первое дает

$$p = 2x + C. \tag{97}$$

Подставляя (97) в первое из уравнений (93), получим:

$$y = x^2 + Cx + C^2. \tag{98}$$

Из уравнения $2p - 3x = 0$ находим:

$$p = \frac{3}{2}x. \tag{99}$$

Поэтому

$$y = \frac{3}{4}x^2 \tag{100}$$

будет решением уравнения (91). Это решение *особое*.

В случае, когда уравнение (1) разрешено относительно x:

$$x = \varphi(y, y'), \tag{101}$$

параметрическим представлением будет

$$x = \varphi(y, p), \quad y' = p. \tag{102}$$

Далее имеем:

$$dy = y'dx; \quad dy = p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial p}dp\right), \tag{103}$$

откуда

$$p = p(y, C), \quad \text{или} \quad y = y(p, C). \tag{104}$$

Подставляя (104) в $x = \varphi(y, p)$, соответственно получаем:

$$x = \varphi[y, p(y, C)], \tag{105}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi[y(p, C), p], \\ y &= y(p, C). \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Если уравнение (103) имеет особое решение

$$p = \gamma(y), \tag{107}$$

то

$$x = \varphi[y, \gamma(y)] \tag{108}$$

может быть *особым* решением уравнения (101).

14. Если уравнение (1) не только разрешено относительно y (или x), но его левая часть зависит линейно от x и y:

$$A(y')\,y+B(y')\,x+C(y')=0, \tag{109}$$

то оно не только всегда допускает указанную выше параметризацию, но и всегда интегрируется в квадратурах, ибо уравнение, связывающее параметры, оказывается линейным.

Уравнение (109) можно записать в виде

$$y=\varphi(y')\,x+\psi(y'). \tag{110}$$

Если $\varphi(y')\not\equiv y'$, то это уравнение называется *уравнением Лагранжа*. Следуя сказанному в п. **13**, имеем:

$$y=\varphi(p)\,x+\psi(p), \quad y'=p; \tag{111}$$

$$dy=y'dx, \quad \varphi(p)\,dx+x\varphi'(p)\,dp+\psi'(p)\,dp=p\,dx, \tag{112}$$

или

$$[\varphi(p)-p]\,dx+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\,dp=0. \tag{113}$$

Если $\varphi(y')\not\equiv\mathrm{const}$, то уравнение (113) приводится к линейному относительно x.*

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}\,x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)} \quad [\varphi(p)-p=0?]. \tag{114}$$

Интегрируя его и подставляя найденное значение x в первое из уравнений (111), получим:

$$\left.\begin{aligned} x&=A(p)\,C+B(p),\\ y&=A_1(p)\,C+B_1(p) \end{aligned}\right\} \tag{115}$$

— *общее решение уравнения Лагранжа* (110) *в параметрической форме.*

Если уравнение

$$\varphi(p)-p=0 \tag{116}$$

имеет вещественные решения $p=p_i$, то, подставляя их в первое из уравнений (111) и замечая, что $\varphi(p_i)=p_i$, получим:

$$y=p_ix+\psi(p_i). \tag{117}$$

Эти прямые всегда являются решениями уравнения Лагранжа (110). Они могут быть особыми решениями.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y=\frac{2}{3}\,y'x+\frac{1}{3}\,y'^2. \tag{118}$$

* В случае, когда $\varphi(y')\equiv\mathrm{const}$, уравнение (113) будет уравнением с разделяющимися переменными. Дальнейшие рассуждения остаются без изменений.

Параметрическим представлением этого уравнения будет

$$y=\frac{2}{3}px+\frac{1}{3}p^2, \quad y'=p. \tag{119}$$

Далее имеем:

$$\left.\begin{aligned} dy=y'dx; \quad & \frac{2}{3}pdx+\frac{2}{3}xdp+\frac{2}{3}pdp=pdx,\\ & -pdx+(2x+2p)\,dp=0,\\ & \frac{dx}{dp}-\frac{2}{p}x=2 \quad (p=0?). \end{aligned}\right\} \tag{120}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} x&=p^2C-2p,\\ y&=\frac{2}{3}p^3C-p^3 \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

будет общим решением уравнения (118) в параметрической форме.

Равенству $p=0$ соответствует решение $y\equiv 0$. Это решение частное (почему?).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y=x-\frac{4}{9}y'^2+\frac{8}{27}y'^3, \tag{122}$$

рассмотренное в примере 6, п. 6.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} & y=x-\frac{4}{9}p^2+\frac{8}{27}p^3, \quad y'=p;\\ & dy=y'dx, \quad dx+\left(-\frac{8}{9}p+\frac{8}{9}p^2\right)dp=pdx, \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

или

$$(1-p)\,dx-\frac{8}{9}p\,(1-p)\,dp=0. \tag{124}$$

Это уравнение распадается на два:

$$dx-\frac{8}{9}pdp=0; \quad 1-p=0. \tag{125}$$

Из первого уравнения находим

$$x=\frac{4}{9}p^2+C. \tag{126}$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{4}{9}p^2+C,\\ y&=\frac{8}{27}p^3+C \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

будет общим решением уравнения (122) в параметрической форме. Исключая параметр p, получим

$$(y-C)^2=(x-C)^3. \tag{128}$$

Второе из уравнений (125) дает $p=1$. Поэтому

$$y=x-\frac{4}{27} \tag{129}$$

будет решением уравнения (122). Это решение **особое** (см. п. **6**, пример 6).

15. Уравнение вида

$$y=xy'+\psi(y') \tag{130}$$

называется *уравнением Клеро*. Интегрируя его по той же схеме, что и уравнение Лагранжа, имеем:

$$\left.\begin{array}{c} y=xp+\psi(p), \quad y'=p; \\ dy=y'dx, \quad pdx+xdp+\psi'(p)\,dp=pdx; \\ [x+\psi'(p)]\,dp=0. \end{array}\right\} \tag{131}$$

Последнее уравнение распадается на два:

$$dp=0; \quad x+\psi'(p)=0. \tag{132}$$

Первое из них дает $p=C$. Подставляя это значение p в $y=$ $=xp+\psi(p)$, получим:

$$y=xC+\psi(C). \tag{133}$$

Это есть *общее решение уравнения Клеро*. Оно состоит из прямых линий. Заметим, что для получения общего решения (133) достаточно просто заменить в уравнении Клеро производную y' на произвольную постоянную C.

Второе из уравнений (132) дает $x=-\psi'(p)$. Подставляя это значение x в $y=xp+\psi(p)$, получим $y=-\psi'(p)p+\psi(p)$. Уравнения

$$\left.\begin{array}{l} x=-\psi'(p), \\ y=-\psi'(p)p+\psi(p) \end{array}\right\} \tag{134}$$

доставляют решение уравнения Клеро. Это решение будет заведомо **особым**, если функция $\psi(p)$ дважды непрерывно дифференцируема и $\psi''(p)$ не меняет знака.

Действительно, найдем дискриминантную кривую семейства (133). Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} y=xC+\psi(C), \\ 0=x+\psi'(C), \end{array}\right\} \tag{135}$$

так что дискриминантной кривой будет

$$\left.\begin{array}{l} x=-\psi'(C), \\ y=-\psi'(C)\,C+\psi(C). \end{array}\right\} \tag{136}$$

Если $\psi'(C)$ сохраняет знак, то дискриминантная кривая (136) будет заведомо огибающей семейства (133) и, следовательно, особым решением уравнения (130). Но уравнения (134) и (136) отличаются только обозначением параметра. Следовательно, уравнения (134) доставляют (при сделанном предположении) особое решение уравнения Клеро.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'^2 - xy' + y = 0. \tag{137}$$

Это уравнение является квадратным уравнением относительно y' и вместе с тем оно — уравнение Клеро. Его удобнее решать как уравнение Клеро:

$$y = xy' - y'^2. \tag{138}$$

Общим решением будет

$$y = Cx - C^2. \tag{139}$$

Ищем огибающую семейства (139). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx - C^2, \\ 0 &= x - 2C \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= 2C, \\ y &= C^2. \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

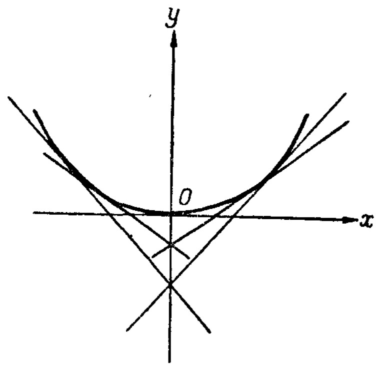

Рис. 27.

Это — дискриминантная кривая семейства (139). Она является огибающей, ибо $\psi''(p) = -2 \neq 0$. Исключая из уравнений (141) параметр C, находим особое решение уравнения (138) в явном виде

$$y = \frac{x^2}{4}. \tag{142}$$

Интегральными кривыми уравнения (138) являются парабола (142) и семейство прямых (139) — семейство касательных к параболе (142) (рис. 27), а также кривые, полученные склеиванием.

Пример 2. Найти кривую, касательные к которой равно удалены от начала координат.

Пусть $y = y(x)$ есть искомая кривая. Тогда уравнение касательной к ней в точке (x, y) имеет вид

$$Y - y = y'(X - x), \tag{143}$$

где X и Y — текущие координаты касательной. Так как расстояние от начала координат до касательной (143) (согласно известной из аналитической геометрии формуле расстояния от данной точки до данной прямой) равно

$$\frac{y - xy'}{\pm\sqrt{y'^2+1}}, \tag{144}$$

то, в силу условия задачи, имеем:

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{y'^2+1}} = k, \tag{145}$$

так что приходим к уравнению Клеро

$$y = xy' + k\sqrt{y'^2 + 1}. \tag{146}$$

Прямые

$$y = Cx + k\sqrt{C^2 + 1}, \tag{147}$$

образующие общее решение этого уравнения, не представляют интереса. Ищем огибающую семейства (147). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} y &= Cx + k\sqrt{C^2+1}, \\ 0 &= x + \frac{kC}{\sqrt{C^2+1}} \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{kC}{\sqrt{C^2+1}}, \\ y &= \frac{k}{\sqrt{C^2+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Это есть огибающая семейства (147) (почему?). Исключая параметр C, получим:

$$x^2 + y^2 = k^2. \tag{150}$$

Эта окружность и является искомой кривой.

Отметим в заключение этого параграфа, что основными методами интегрирования уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной, являются разрешение его относительно производной и интегрирование полученных уравнений и метод введения параметра, в котором путем использования основного соотношения $dy = y'dx$ интегрирование данного уравнения тоже приводится к интегрированию уравнения, разрешенного относительно производной.

Среди уравнений, решаемых этими методами, наиболее важными являются уравнение, квадратное относительно производной, и уравнение Клеро.

Решая уравнение, не разрешенное относительно производной, студент должен внимательно следить за возможной потерей решений, которые могут оказаться особыми. Кроме того, нужно уметь находить кривые, подозрительные на особое решение, по виду уравнения и по семейству интегральных кривых и уметь проверить, будут ли они особыми решениями.

§ 3. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИЯХ

16. *Изогональной траекторией* семейства кривых

$$\Phi(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

где a — параметр, называется кривая L_1 (рис. 28), пересекающая все кривые L этого семейства под одним и тем же углом α, т. е. угол между касательными к кривым L_1 и L в точке пересечения равен α.

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то изогональная траектория называется *ортогональной*.

Пример 1. Рассмотрим семейство полупрямых, выходящих из начала координат

$$\left.\begin{aligned} y &= ax \quad (x \neq 0), \\ x &= 0 \quad (y \neq 0) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(рис. 29). Очевидно, что всякая окружность

$$x^2 + y^2 = C^2 \tag{3}$$

будет ортогональной траекторией этого семейства, и обратно: каждая из полупрямых (2) является ортогональной траекторией семейства (3).

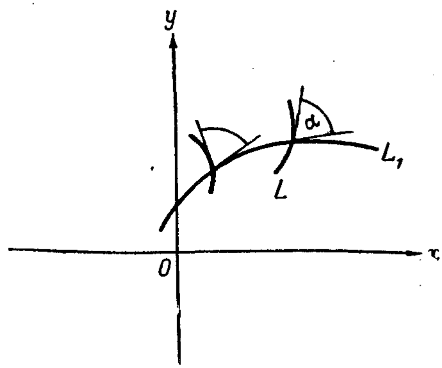

Рис. 28.

Если составить дифференциальные уравнения семейств (2) и (3), то ясно, что поля направлений, определяемые полученными уравнениями, будут взаимно ортогональны. Поэтому эти дифференциальные уравнения могут быть получены одно из другого простой заменой y' на $-\frac{1}{y'}$.

В самом деле, найдем дифференциальное уравнение семейства (2). Оно находится исключением a из системы

$$\left.\begin{aligned} y &= ax, \\ y' &= a. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Получаем:

$$y' = \frac{y}{x}. \tag{5}$$

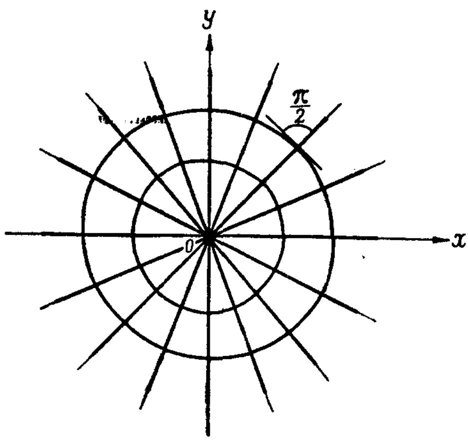

Рис. 29.

(Полупрямые $x = 0$ $(y \neq 0)$ — полуоси оси Oy являются решениями перевернутого уравнения.) Дифференциальным уравнением семейства (3) будет

$$x + yy' = 0 \tag{6}$$

или

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{7}$$

Поля направлений, определяемые уравнениями (5) и (7), взаимно ортогональны.

Уравнение (7) может быть получено из уравнения (5) заменой y' на $-\frac{1}{y'}$. Интегрируя уравнение (7), очевидно, получим семейство (3). Аналогично находятся ортогональные траектории любого заданного семейства.

Для нахождения ортогональных траекторий семейства (1) составляют дифференциальное уравнение этого семейства, для чего исключают параметр a из системы

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x, y, a)=0,\\ \Phi'_x+\Phi'_y\cdot y'=0\end{array}\right\} \tag{8}$$

и заменяют в найденном дифференциальном уравнении

$$F(x, y, y')=0 \tag{9}$$

производную y' на $-\frac{1}{y'}$. Получают:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)=0. \tag{10}$$

Остается проинтегрировать это уравнение.

Для получения дифференциального уравнения семейства изогональных траекторий нужно в уравнении (9) заменить y' на

$$\frac{y'-k}{1+ky'}, \text{ где } k=\operatorname{tg}\alpha \tag{11}$$

[Матвеев. Методы интегрирования, п. **79**; Степанов, стр. 137].

Пример 2. Найти ортогональные траектории семейства окружностей

$$x^2+y^2-2ay=0 \tag{12}$$

(рис. 30).

Исключая a из системы

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2-2ay=0,\\ x+yy'-ay'=0,\end{array}\right\} \tag{13}$$

находим, что дифференциальным уравнением данного семейства (12) будет

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}. \tag{14}$$

Заменяя в уравнении (14) y' на $-\frac{1}{y'}$, получим:

$$y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}. \tag{15}$$

Интегрируя, найдем:

$$x^2+y^2=Cx. \tag{16}$$

Это семейство окружностей и является искомым семейством ортогональных траекторий.

Пример 3. Найти изогональные траектории семейства полупрямых (2). Дифференциальным уравнением этого семейства является уравнение (5). Заменяя в нем y' выражением (11), получим

$$\frac{y'-k}{1+ky'}=\frac{y}{x} \quad (k=\operatorname{tg}\alpha). \tag{17}$$

Интегрируя, получим

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \tag{18}$$

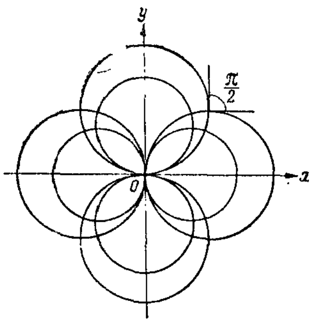

Рис. 30.

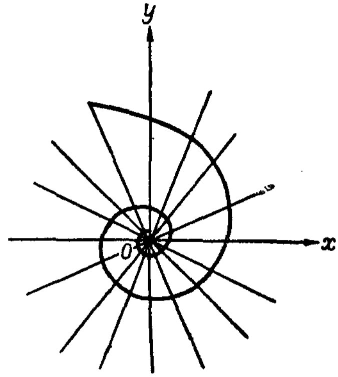

Рис. 31.

Записав это семейство кривых в полярных координатах ($x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$):

$$r=Ce^{\frac{1}{k}\theta}, \tag{19}$$

видим, что оно представляет собой семейство логарифмических спиралей (рис. 31).

17. В случае, когда семейство кривых задано в полярных координатах

$$\Phi(r,\ \theta,\ a)=0, \tag{20}$$

для нахождения дифференциального уравнения семейства изогональных траекторий по дифференциальному уравнению заданного семейства нужно заменить в нем $\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}$ на

$$\frac{1+k\frac{r}{\dot{r}}}{\frac{r}{\dot{r}}-k}, \text{ если } \alpha\neq\frac{\pi}{2} \quad (k=\operatorname{tg}\alpha), \tag{21}$$

и на

$$-\frac{r^2}{\dot{r}}, \text{ если } \alpha=\frac{\pi}{2} \tag{22}$$

[Матвеев. Методы интегрирования, п. **81**].

Пример 1. Найти ортогональные траектории семейства архимедовых спиралей

$$r = a\theta. \tag{23}$$

Дифференциальным уравнением этого семейства будет

$$\dot{r} = \frac{r}{\theta}. \tag{24}$$

Заменяя в нем $\dot{r}$ на $-\frac{r^2}{\dot{r}}$, получим:

$$-\frac{r}{\dot{r}} = \frac{1}{\theta}, \text{ или } \frac{\dot{r}}{r} = -\theta, \tag{25}$$

откуда

$$r = Ce^{-\frac{\theta^2}{2}}. \tag{26}$$

Это и есть искомое семейство ортогональных траекторий.

При нахождении изогональных (ортогональных) траекторий семейства кривых, заданного в декартовых координатах, иногда бывает полезно перейти предварительно к полярным координатам.

Пример 2. Вернемся к п. 16, пример 2. Переходя в уравнении (12) к полярным координатам, получим:

$$r = 2a \sin\theta. \tag{27}$$

Дифференциальным уравнением этого семейства будет

$$\dot{r} = r \operatorname{ctg}\theta. \tag{28}$$

Заменяя $\dot{r}$ на $-\frac{r^2}{\dot{r}}$, получим:

$$-\frac{r}{\dot{r}} = \operatorname{ctg}\theta, \text{ или } \frac{\dot{r}}{r} = \operatorname{tg}\theta, \tag{29}$$

откуда

$$r = C\cos\theta. \tag{30}$$

Переходя обратно к декартовым координатам, получим семейство окружностей (16).

§ 4. ЗАДАЧИ

Матвеев. Сборник задач, №№ **417, 418, 423, 426, 427, 428, 429, 430, 432, 434, 438, 439, 445, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 456, 457, 458, 465, 466, 467, 469, 471, 472.**

ГЛАВА III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Уравнение n-го порядка и его решения. **2.** Геометрическое и механическое истолкования уравнения второго порядка и его решений. **3.** Задача Коши. **4.** Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши. **5.** Понятие о граничной (краевой) задаче. **6.** Общее решение, общее решение в форме Коши, общий интеграл, общее решение в параметрической форме. **7.** Частное решение. **8.** Особое решение. **9.** Промежуточные интегралы. **10.** Уравнение n-го порядка, не разрешенное относительно старшей производной.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ, И УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

11. Уравнение, содержащее только независимую переменную и производную n-го порядка. **12.** Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных. **13.** Уравнение, не содержащее независимой переменной. **14.** Уравнение, однородное относительно искомой функции и ее производных. **15.** Обобщенное однородное уравнение. **16.** Уравнение, левая часть которого есть точная производная.

§ 3. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования, гл. III. пп. **82—100.**

Степанов, гл. IV, § 1 [стр. 140—143 (до формулы (6)), стр. 150—154]; § 2 [стр. 154—158 (кроме примечания),

стр. 159—162 (до п. 4)]; § 3 [стр. 167—170 (до примера 7), стр. 172—177]; § 4.

Эльсгольц, гл. II, §§ 1, 2.

Дополнительная

Степанов, гл. IV, § 3, п. **4** (Приложение к динамике точки), § 4, пример 7 (Линия погони).

В. И. Смирнов, гл. I, § 2, п. **16** (Изгиб балки), п. **17** (примеры 1 и 2).

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Уравнение n-го порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где f есть известная функция, заданная в некоторой области изменения переменных x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$, которую мы будем (при $n>1$) называть *областью задания уравнения* (1). Относительно функции f предполагают, что она по крайней мере непрерывна в области задания.

Решением уравнения (1) в интервале $(a,\ b)$ называется всякая функция

$$y=y(x), \tag{2}$$

которая определена и n раз непрерывно дифференцируема в этом интервале и обращает уравнение (1) в тождество

$$y^{(n)}(x)\equiv f[x,\ y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x)]\quad(a<x<b). \tag{3}$$

Решение уравнения (1) может быть задано также в неявном виде: $\Phi(x,\ y)=0$ и в параметрической форме: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

В отличие от уравнений первого порядка уравнение n-го порядка (1) не может иметь решений вида $x=a$ ($a=\text{const}$).

График решения уравнения (1) называется *интегральной* кривой.

2. Уравнение второго порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0 \tag{4}$$

можно переписать в виде

$$F\left[x,\ y,\ y',\ \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\right]=0. \tag{5}$$

Отсюда следует, что оно представляет собой связь между координатами точки (x, y) интегральной кривой $y=y(x)$, наклоном касательной y' и кривизной $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ в этой точке.

Пример 1. Уравнение

$$y''=m(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

выражает геометрически тот факт, что кривизна в каждой точке любой интегральной кривой этого уравнения есть постоянная величина, равная m. В частности, при $m=0$ имеем

$$y''=0. \tag{7}$$

Решениями этого уравнения являются все кривые, кривизна которых в каждой точке равна нулю. Очевидно, это прямые

$$y=C_1x+C_2, \tag{8}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Если материальная точка массы m движется по оси Ox под действием силы $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$, зависящей от времени t, положения x этой точки и ее скорости $\frac{dx}{dt}$ в момент времени t, то, согласно второму закону Ньютона, имеем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{9}$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)\left(f=\frac{F}{m}\right), \tag{10}$$

где $\frac{d^2x}{dt^2}$ — ускорение точки в момент времени t.

Уравнение (10) есть дифференциальное уравнение второго порядка. Всякому решению

$$x=x(t) \tag{11}$$

уравнения (10) соответствует определенный закон движения точки по оси Ox. Решение (11) будем называть *движением*, определяемым дифференциальным уравнением (10).

Уравнение (10) выражает закон движения в дифференциальной форме. Задача интегрирования уравнения (10) состоит в том, чтобы выразить этот закон в конечной форме.

Если существует такое число x_0, что

$$f(t, x_0, 0)=0 \tag{12}$$

при всех рассматриваемых значениях времени t, то уравнение (10) имеет решение

$$x\equiv 0. \tag{13}$$

Движение, соответствующее этому решению, называется *состоянием покоя.*

Пример 2. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

определяет движения $x \equiv 0$ (состояние покоя), $x = \cos t$, $x = \sin t$ и бесчисленное множество других движений:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

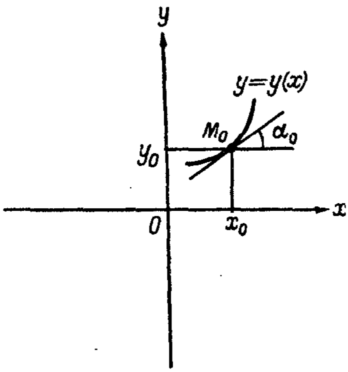

Рис. 32.

3. *Задача Коши* для уравнения (1) ставится так: найти решение (2), удовлетворяющее *начальным условиям*

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,$$
$$y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0, \qquad (14)$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа (*начальные данные* решения (2)).

В случае уравнения второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (15)$$

начальные условия имеют вид

$$y = y_0,\ y' = y_0' \text{ при } x = x_0, \qquad (16)$$

так что в точке $x = x_0$ задаются значения искомой функции $y(x)$ и ее первой производной $y'(x)$. Геометрически речь идет о нахождении интегральной кривой $y = y(x)$ (рис. 32), проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей в этой точке заданный наклон касательной $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Если, в достаточно малой окрестности точки x_0, существует только одна интегральная кривая уравнения (15), которая проходит через заданную точку (x_0, y_0) и имеет в ней заданный наклон касательной y_0', то говорят, что *задача Коши с начальными данными* x_0, y_0, y_0' *имеет единственное решение.*

Пример 1. Найти интегральную кривую уравнения

$$y'' = -1, \qquad (17)$$

проходящую через точку $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ и касающуюся прямой $x + y = 0$.

Задача сводится к нахождению решения уравнения (17), удовлетворяющего начальным условиям

$$y=\frac{1}{2}, \; y'=-1 \text{ при } x=1 \tag{18}$$

(рис. 33).

Интегрируя уравнение (17), имеем:

$$y'=-x+C_1. \tag{19}$$

Интегрируя еще раз, получим:

$$y=-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2. \tag{20}$$

Эта формула, очевидно, содержит в себе все решения уравнения (17).

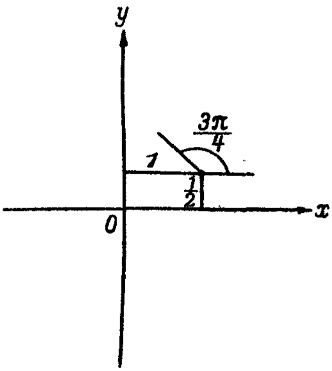

Рис. 33.

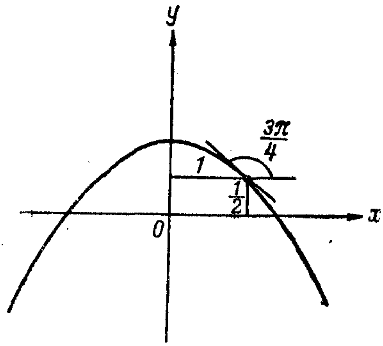

Рис. 34.

Подставим в систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2, \\ y'&=-x+C_1 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

вместо x, y и y' их начальные значения: 1, $\frac{1}{2}$ и -1. Получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}&=-\frac{1}{2}+C_1+C_2, \\ -1&=-1+C_1. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Решая эту систему относительно C_1 и C_2, имеем: $C_1=0$, $C_2=1$. Подставив найденные значения C_1 и C_2 в формулу (20), найдем:

$$y=-\frac{x^2}{2}+1. \tag{23}$$

Эта парабола (рис. 34) и есть искомая кривая. Так как формула (20) содержит все решения уравнения (17), то других решений, удовлетворяющих начальным условиям (18), и, следовательно, других кривых, удовлетворяющих условиям нашей задачи, нет.

Для механического истолкования задачи Коши обратимся к дифференциальному уравнению (10). Задача Коши для этого уравнения состоит в нахождении движения (11), удовлетворяющего начальным условиям

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \text{ при } t = t_0, \tag{24}$$

где числа t_0, x_0 и v_0 (*начальные данные* движения (11)) суть соответственно начальный момент времени, начальное положение и начальная скорость точки.

Пример 2. Движением $x = x(t)$, определяемым уравнением $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ и начальными условиями

$$x = 1, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{25}$$

очевидно, будет

$$x = \cos t. \tag{26}$$

4. *Если правая часть уравнения* (1) *непрерывна в* $(n+1)$-*мерном параллелепипеде*

$$R: |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b, \quad |y' - y_0'| \leqslant b, \ldots,$$
$$|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leqslant b,$$

где a *и* b — *заданные положительные числа, и, следовательно, ограничена в нем:*

$$|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leqslant M, \tag{27}$$

M — *постоянное положительное число, то существует по крайней мере одно решение* (2) *уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям* (14), *заведомо определенное в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{28}$$

где

$$h = \min\left[a, \frac{b}{\max\limits_R (M, |y'|, \ldots, |y^{(n-1)}|)}\right] \tag{29}$$

(теорема Пеано).

Дадим упрощенную формулировку теоремы Пикара, гарантирующей не только существование, но и единственность решения задачи Коши.

Теорема Пикара. *Если правая часть уравнения* (1) *определена в параллелепипеде* R *и удовлетворяет в нем двум условиям:*

1) $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *непрерывна;*

2) $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ *существуют и ограничены:*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant K, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y'}\right| \leqslant K, \quad \ldots, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right| \leqslant K, \tag{30}$$

то уравнение (1) *имеет единственное решение* (2), *удовлетворяющее начальным условиям* (14), *заведомо определенное в интервале* (28).

Из теоремы Пикара следует, что если правая часть уравнения (1) есть полином относительно аргументов $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то существует единственное решение (2), удовлетворяющее начальным условиям (14), где начальные значения искомой функции и ее производных могут быть выбраны совершенно произвольно, а начальное значение независимой переменной должно принадлежать интервалу непрерывности коэффициентов полинома.

Если же правая часть уравнения (1) есть полином относительно всех аргументов, то все начальные данные можно выбирать произвольно.

Пример. Для уравнения

$$y''' = yy'' + y^2 - 6x^2 \tag{31}$$

существует единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad y'' = y_0'' \quad \text{при } x = x_0, \tag{32}$$

где x_0, y_0, y_0', y_0'' — произвольные заданные числа. Например, решением, удовлетворяющим начальным условиям

$$y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 2 \quad \text{при } x = 0, \tag{33}$$

будет

$$y = x^2. \tag{34}$$

Других решений, удовлетворяющих начальным условиям (33), нет.

5. В задаче Коши условия, которым должно удовлетворять искомое решение, задаются при одном и том же значении независимой переменной. В теории дифференциальных уравнений большое значение имеет также задача, в которой искомая функция (и ее производные) должна удовлетворять некоторым условиям на концах заданного интервала, и ищется решение, определенное внутри этого интервала. Такая задача называется *граничной* или *краевой задачей*, а упомянутые условия — *граничными* или *краевыми условиями*.

Пример 1. Найти интегральную кривую уравнения (17),

$$y'' = -1,$$

пересекающую ось Ox в точках $x = -1$ и $x = 1$.

Нужно найти решение уравнения (17), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \quad \text{при } x = -1, \\ y &= 0 \quad \text{при } x = 1. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Все решения уравнения (17) содержатся в формуле (20),

$$y = -\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Полагая в ней сначала $x=-1$, $y=0$, затем $x=1$, $y=0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} 0&=-\frac{1}{2}-C_1+C_2,\\ 0&=-\frac{1}{2}+C_1+C_2,\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

откуда $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{2}$. Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в формулу (20), найдем:

$$y=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}. \tag{37}$$

Эта парабола (рис. 35) и есть искомая кривая. Часть ее, соответствующая интервалу $[-1, +1]$, является решением граничной задачи (17), (35).

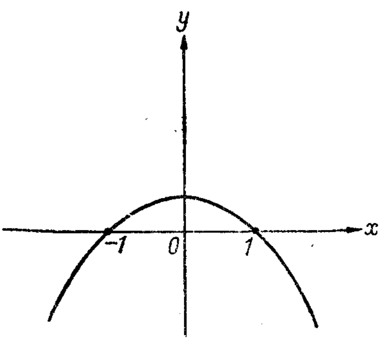

Рис. 35.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y''=6x, \tag{38}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} y+y'&=0 \quad \text{при } x=0,\\ y-y'&=0 \quad \text{при } x=1.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Все решения уравнения (38) содержатся в формуле

$$y=x^3+C_1x+C_2. \tag{40}$$

Выбирая значения произвольных постоянных C_1 и C_2 так, чтобы удовлетворялись условия (39), приходим к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_2+C_1&=0,\\ 1+C_1+C_2-3-C_1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

откуда $C_1=-2$, $C_2=2$, так что искомым решением будет

$$y=x^3-2x+2 \ (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{42}$$

6. Определение общего решения уравнения $y'=f(x, y)$, приведенное в гл. I, п. **7**, распространяется на уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной (1):

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Рассмотрим некоторую область D изменения переменных x, y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши.

Определение. Функция

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{43}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x, C_1, C_2, $\ldots$, C_n и имеющая непрерывные частные производные по x до порядка n включительно, называется *общим решением* уравнения (1) в области D, если:

1) система уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y' &= \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, так что мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ C_2 &= \psi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}); \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

2) функция (43) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольных постоянных, доставляемых формулами (45), когда точка $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ пробегает область D.

Формула общего решения (43) содержит в себе все решения с начальными данными из области D. Каждое из них получается из формулы общего решения (43) при соответствующих значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, которые определяются из системы (44) после замены $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ начальными данными решения.*

Общее решение, записанное в виде

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}), \tag{46}$$

где x_0 — фиксированное число, а величины $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — начальные значения искомой функции y и ее производных $y', \ldots, y^{(n-1)}$ при $x = x_0$ — играют роль произвольных постоянных, называется *общим решением в форме Коши*.

Если общее решение уравнения (1) задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{47}$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения.

Если функция (43), дающая общее решение уравнения (1), задана в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y &= \psi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

то (48) называется *общим решением* уравнения (1) в *параметрической форме*.

---

* С решением задачи Коши при помощи формулы общего решения мы по существу уже имели дело в п. 3, пример 1, ибо формула (20), содержащая в себе все решения уравнения (17), является общим решением этого уравнения в области $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$.

7. Решение $y=y(x)$ уравнения (1) называется *частным*, если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши, т. е. какую бы точку $(x_0, y(x_0))$ на решении $y=y(x)$ ни взять, не существует другого решения $y=y^*(x)$, которое удовлетворяло бы начальным условиям

$$y^*(x_0)=y(x_0), \quad y^{*\prime}(x_0)=y'(x_0), \ \ldots, \ y^{*(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}(x_0).$$

В случае уравнения второго порядка это означает, что не существует другой интегральной кривой, которая проходила бы через точку, лежащую на кривой $y=y(x)$, и имела бы общую с ней касательную в этой точке.

Всякое решение, получающееся из общего решения (43) при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, является частным решением. При этом не исключаются и значения $\pm\infty$.

8. Решение $y=y(x)$ называется *особым*, если в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши.

Если правая часть уравнения (1) является полиномом относительно всех аргументов $x, y, y', \ldots, y^{n-1}$, то это уравнение заведомо не имеет особых решений.

Особыми решениями уравнения (1):

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

правая часть которого непрерывна в области задания и имеет частные производные по $y, y', \ldots, y^{n-1}$, могут быть только те кривые, для которых выполняется хоть одно из равенств

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\infty, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}=\infty, \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}=\infty, \tag{49}$$

так что в этом случае кривые, подозрительные на особое решение, находятся из дифференциальных уравнений. Так как порядок каждого из них не выше $n-1$, то уравнение (1) может иметь семейство особых решений, зависящее от произвольных постоянных, число которых не превышает $n-1$ (см. п. **12**, пример 2).

9. Если в процессе интегрирования уравнения (1) мы получим соотношение

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, \ C_1, \ldots, C_k)=0, \tag{50}$$

в которое обязательно входят производная порядка $n-k$ и все k произвольных постоянных, то такое соотношение будем называть *промежуточным интегралом k-го порядка*.

Промежуточный интеграл k-го порядка представляет собой дифференциальное уравнение порядка $n-k$. Дальнейшее интегрирование этого уравнения (если оно возможно) введет еще $n-k$ произвольных постоянных, и мы получим общий интеграл уравнения (1).

Промежуточный интеграл вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1)=0 \tag{51}$$

называется *первым интегралом* уравнения (1).

Знание k $(1<k<n)$ независимых первых интегралов дает возможность путем исключения из них производных $y^{(n-1)}, \ldots, y^{(n-k+1)}$ понизить порядок данного уравнения (1) на k единиц.

Если известно n независимых первых интегралов, то, исключая из них все производные, получим общий интеграл уравнения (1).

10. Рассмотрим уравнение n-го порядка, не разрешенное относительно старшей производной

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0. \tag{52}$$

В простейшем случае, когда это уравнение удастся разрешить (в элементарных функциях) относительно старшей производной, мы получим одно или несколько уравнений вида

$$y^{(n)}=f_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{53}$$

где f_k — вещественные функции от своих аргументов и интегрирование уравнения (52) сводится к интегрированию уравнений (53).

Задача Коши для уравнения (52) ставится так же, как и для уравнения, разрешенного относительно $y^{(n)}$. Единственность решения задачи Коши для уравнения (52) определяется аналогично единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши, приведенная в гл. II, п. **4**, легко переносится и на уравнение (52).

Теорема. *Предположим, что левая часть уравнения* (52) *удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) *функция* $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *определена и непрерывна вместе со своими частными производными, в некоторой замкнутой окрестности точки* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})$;

2) *функция* F *в точке* $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})$ *обращается в нуль*

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)})=0; \tag{54}$$

3) *производная* $F'_{y^{(n)}}$ *в этой точке не равна нулю.*

Тогда существует единственное решение

$$y=y(x) \tag{55}$$

уравнения (52), *определенное и n раз непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки $x=x_0$, удовлетворяющее начальным условиям*

$$y=y_0,\quad y'=y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}\ \text{при}\ x=x_0, \tag{56}$$

и такое, что

$$y^{(n)}(x_0)=y_0^{(n)}. \tag{57}$$

Решение $y=y(x)$ уравнения (52) называется *частным*, или *особым*, если в каждой точке его соответственно сохраняется или нарушается единственность решения задачи Коши.

Из приведенной выше теоремы следует, что если левая часть уравнения (52) определена и непрерывно дифференцируема по всем аргументам, то особыми решениями могут быть только те кривые, в точках которых выполняются соотношения

$$F=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0, \tag{58}$$

так что эти кривые являются решениями дифференциального уравнения, порядок которого не превосходит $n-1$.

Задача интегрирования уравнения n-го порядка (как разрешенного, так и не разрешенного относительно старшей производной) в некоторых случаях может быть разрешена путем понижения порядка его (при помощи соответствующих замен искомой функции и независимой переменной), если полученное уравнение удается проинтегрировать в конечном виде.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРИРУЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ, И УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

11. Если уравнение n-го порядка содержит только x и $y^{(n)}$ и разрешено относительно $y^{(n)}$, т. е.

$$y^{(n)}=f(x), \tag{1}$$

причем $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), то, интегрируя уравнение (1) последовательно n раз, получим:

$$y=\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n\ \text{раз}} f(x)\,dx\,dx\ldots dx+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+$$
$$+C_{n-1}x+C_n. \tag{2}$$

Эта формула содержит в себе все решения уравнения (1) и является общим решением его в области

$$a<x<b,\quad |y|<+\infty,\quad |y'|<+\infty,\ \ldots,\ |y^{(n-1)}|<+\infty. \tag{3}$$

Уравнение (1) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0, \tag{4}$$

где числа $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ можно задавать совершенно произвольно, а число x_0 должно принадлежать интервалу (a, b); это решение будет определено и n раз непрерывно дифференцируемо во всем интервале (a, b) (почему?). Оно может быть получено из формулы (2) при соответствующем выборе значений произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Это же решение можно найти, интегрируя последовательно n раз уравнение (1) в пределах от x_0 до x и принимая во внимание начальные условия (4). Получим:

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx dx \ldots dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \ldots + y'_0(x - x_0) + y_0. \tag{5}$$

Так как

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx dx \ldots dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x - t)^{n-1}\,dt \tag{6}$$

(почему?), то решение (5) можно переписать в виде формулы, содержащей только о д н у квадратуру:

$$Y_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x - t)^{n-1}\,dt + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + \ldots + y'_0(x - x_0) + y_0. \tag{7}$$

В частности, решением уравнения (1) с н у л е в ы м и начальными значениями искомой функции и ее производных, т. е. решением, удовлетворяющим начальным условиям:

$$y = 0, \quad y' = 0, \ \ldots, \ y^{(n-1)} = 0 \quad \text{при } x = x_0, \tag{8}$$

будет

$$y_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x - t)^{n-1}\,dt. \tag{9}$$

Если в формуле (7) считать $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными числами, то она даст общее решение уравнения (1) в области (3) в форме Коши.

Заметим, что для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно знать одно частное решение его. В самом деле, пусть y_1—частное решение уравнения (1), так что имеет место тождество

$$y_1^{(n)} \equiv f(x) \quad (a < x < b). \tag{10}$$

Положим

$$y = y_1 + z, \tag{11}$$

где z — новая неизвестная функция. Тогда, подставляя (11) в (1) и принимая во внимание тождество (10), имеем:

$$z^{(n)} = 0. \tag{12}$$

Общим решением этого уравнения будет

$$z = C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), получим:

$$y = y_1 + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \tag{14}$$

Это есть общее решение уравнения (1). В частности, общим решением уравнения (1) будет

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + \\ + C_{n-1}x + C_n. \tag{14'}$$

Пример 1. Общим решением уравнения

$$y'' = \frac{\sin x}{x} \tag{15}$$

будет

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{\sin t}{t}(x-t)\,dt + C_1x + C_2. \tag{16}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{17}$$

Если оно разрешимо относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{18}$$

то, проинтегрировав все уравнения (18), получим *общий интеграл* уравнения (17).

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y''^2 - 4x^2 = 0. \tag{19}$$

Решая его относительно y'', имеем:

$$y'' = 2x, \quad y'' = -2x. \tag{20}$$

Интегрируя каждое из этих уравнений, получим два семейства интегральных кривых:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2, \\ y &= -\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

которые образуют общий интеграл уравнения (19).

Предположим, что уравнение (17) не разрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает параметрическое представление

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y^{(n)} &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Тогда, пользуясь соотношением

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx, \tag{23}$$

получаем:

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt, \tag{24}$$

откуда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C_1 \equiv \psi_1(t, C_1). \tag{25}$$

Аналогично найдем выражение для $y^{(n-2)}, \ldots, y', y$, так что

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Эти уравнения будем называть *общим решением* уравнения (17) *в параметрической форме.*

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$x - y'' e^{y''} = 0. \tag{27}$$

Оно допускает параметрическое представление

$$x = te^t, \quad y'' = t. \tag{28}$$

Поэтому

$$dy' = y''dx, \quad dy' = t(1+t)e^t,$$

$$y' = \int t(1+t)e^t dt = (t^2 - t + 1)e^t + C_1;$$

$$dy = y'dx, \quad dy = [(t^2 - t + 1)e^t + C_1](1+t)e^t,$$

$$y = \int [(t^3+1)e^{2t} + C_1(1+t)e^t]\, dt = \frac{1}{8}(4t^3 - 6t^2 + 6t + 1)e^{2t} + $$
$$+ C_1 te^t + C_2.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} x &= te^t, \\ y &= \frac{1}{8}(4t^3 - 6t^2 + 6t + 1)\, e^{2t} + C_1 te^t + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

есть общее решение уравнения (27) в параметрической форме.

12. Уравнение, не содержащее искомой функции, и уравнение, не содержащее искомой функции и последовательных первых производных, имеют следующий общий вид:

$$F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leqslant k < n). \qquad (30)$$

Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц при помощи введения новой искомой функции z по формуле

$$y^{(k)} = z. \qquad (31)$$

Получаем:

$$F(x,\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{(n-k)}) = 0. \qquad (32)$$

Предположим, что это уравнение интегрируется в конечном виде и

$$z = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k}) \qquad (33)$$

есть общее решение этого уравнения. Тогда

$$y^{(k)} = \varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-k}). \qquad (34)$$

Интегрируя это уравнение, найдем *общее решение* данного уравнения (30).

Особым решениям уравнения (32) соответствуют о с о б ы е решения уравнения (30).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y'^2 + 1 = 0. \qquad (35)$$

Полагая

$$y' = z, \qquad (36)$$

имеем:

$$z' + z^2 + 1 = 0. \qquad (37)$$

Интегрируя (37), находим:

$$z = -\operatorname{tg}(x + C_1)\left(-\frac{\pi}{2} - C_1 < x < \frac{\pi}{2} - C_1\right). \qquad (38)$$

Подставляя (38) в (36), имеем:

$$y' = -\operatorname{tg}(x + C_1). \qquad (39)$$

Интегрируя, получим:

$$y = \ln\,[\cos(x + C_1)] + C_2. \qquad (40)$$

Это есть общее решение уравнения (35). Особых решений нет (почему?).

Задача Коши для уравнения (35) с л ю б ы м и начальными данными x_0, y_0, y_0' имеет решение и притом единственное (почему?).

Найдем, пользуясь формулой общего решения (40), решение с н у л е в ы м и начальными значениями искомой функции и ее производной при $x = 0$:

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{при } x = 0. \qquad (41)$$

Подставляя в систему

$$\left.\begin{aligned} y &= \ln[\cos(x+C_1)] + C_2, \\ y' &= -\operatorname{tg}(x+C_1) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

вместо x, y и y' начальные данные 0, 0, 0, имеем:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \ln\cos C_1 + C_2, \\ 0 &= -\operatorname{tg} C_1. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Решая эту систему относительно C_1 и C_2, находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Подставляя эти значения произвольных постоянных в общее решение (40), получим:

$$y = \ln\cos x. \tag{44}$$

Это и есть искомое решение.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y' = xy'' - y''^2 \tag{45}$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{а) } y = 0,\ y' = 0 \ \text{ при } x = 1; \qquad \text{б) } y = 0,\ y' = 1 \ \text{ при } x = 2, \tag{46}$$

выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности решения, пользуясь теоремой существования и единственности (см. п. **10**).

Полагая $y' = z$, имеем:

$$z = xz' - z'^2. \tag{47}$$

Это уравнение Клеро имеет общее решение

$$z = xC_1 - C_1^2 \tag{48}$$

и особое решение

$$z = \frac{x^2}{4}. \tag{49}$$

Заменяя в (48) и (49) z на y', получим:

$$y' = xC_1 - C_1^2; \quad y' = \frac{x^2}{4}. \tag{50}$$

Интегрируя, найдем:

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2 x + C_2 \tag{51}$$

общее решение уравнения (45) и

$$y = \frac{x^3}{12} + C \tag{52}$$

— семейство особых решений.

Тот факт, что только кривые (52) и могли быть особыми решениями, можно установить не интегрируя уравнение (45). Для этого достаточно искать кривые, подозрительные на особое решение по правилу, указанному в п. **10**, или же, разрешив предварительно уравнение (45) относительно y'', воспользоваться сказанным в п. **8**.

Обратимся к поставленным задачам Коши.

а) Подставляя начальные данные в уравнение (45), имеем:

$$0 = y'' - y''^2, \tag{53}$$

откуда находим для y'' два значения: $y'' = 0$ и $y'' = 1$. В окрестности каждой из точек (1, 0, 0, 0) и (1, 0, 0, 1) выполнены условия теоремы существования и единственности. Поэтому существуют два решения, удовлетворяющие рассматриваемым начальным условиям, так что решение задачи Коши единственно.

Для нахождения этих решений воспользуемся формулой общего решения (51). Подставляя начальные данные 1, 0, 0 в систему

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{C_1}{2}x^2 - C_1^2 x + C_2, \\ y' &= C_1 x - C_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{C_1}{2} - C_1^2 + C_2, \\ 0 &= C_1 - C_1^2, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

откуда

$$C_1^{(1)} = 0, \quad C_2^{(1)} = 0; \quad C_1^{(2)} = 1, \quad C_2^{(2)} = \frac{1}{2}. \tag{56}$$

Поэтому получаем два решения $y = 0$ и $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

Искомыми решениями a priori могут быть также интегральные кривые, входящие в семейство особых решений (52). Но в данном случае таких решений нет, в силу установленной единственности решения задачи Коши. В этом легко убедиться и непосредственно. Действительно, ни одно из решений (52) не может удовлетворять рассматриваемым начальным условиям, так как для каждого из этих решений должно быть $y' = \frac{x^2}{4}$ при всех x, и, следовательно, $y' = \frac{1}{4}$ при $x = 1$.

б) В этом случае единственность решения задачи Коши теоремой п. **10** не гарантируется. В самом деле, подставляя начальные данные в уравнение (45), имеем:

$$1 = 2y'' - y''^2, \tag{57}$$

откуда $y'' = 1$.

Проверяя выполнение условий теоремы п. **10**, видим, что третье условие не выполнено, ибо $F'_{y''} = 2y'' - x$; $F'_{y''}(2, 0, 1, 1) = 0$. Поэтому единственность решения задачи Коши не гарантируется, так что при решении задачи Коши нужно обязательно принять во внимание семейство особых решений (52).

Найдем теперь решения рассматриваемой задачи Коши. Пользуясь формулой общего решения (51), получим:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x. \tag{58}$$

Одно из особых решений (52), а именно

$$y = \frac{x^3}{12} - \frac{2}{3}, \tag{59}$$

тоже удовлетворяет поставленным начальным условиям.

Единственность решения задачи Коши нарушена.

Заметим, что решениями задачи Коши наряду с интегральными кривыми (58) и (59) будут и интегральные кривые, склеенные из них.

13. Уравнение, не содержащее независимой переменной x,

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{60}$$

допускает понижение порядка на единицу, если ввести вместо y новую неизвестную функцию z, положив

$$y' = z, \tag{61}$$

и принять y за независимую переменную, так что

$$z = z(y). \tag{62}$$

Действительно, выражая $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ через z и производные от z по y, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y' &= z, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z, \\ \frac{d}{dx} &= \frac{d}{dy} \cdot z^*, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} z\right) \cdot z = \left[\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] \cdot z, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Подставляя (63) в (60), получим уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$F\left[y, z, \frac{dz}{dy} z, \ldots, \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}\right)\right] = 0. \tag{64}$$

Предположим, что

$$z = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \tag{65}$$

есть общее решение уравнения (64). Тогда

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \tag{66}$$

откуда

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx \quad (\varphi = 0?). \tag{67}$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n \tag{68}$$

— *общий интеграл* уравнения (60).

* Эта символическая формула говорит о том, что для нахождения производной от некоторой функции по x нужно найти производную по y и умножить последнюю на z.

Особые решения уравнения (64) могут привести, в силу подстановки (61), к *особым* решениям уравнения (60).

Кроме того, *особыми* решениями могут быть прямые вида $y=b$, которые могли потерять, принимая y за независимую переменную. Равенство $\varphi=0$ может привести к особым решениям того же вида. Решения вида $y=b$ можно найти непосредственно подстановкой $y=b$ в уравнение (60). Если уравнение

$$F(b,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)=0 \tag{69}$$

имеет вещественные решения, то соответствующие им прямые $y=b$ будут решениями уравнения (60). Остается только проверить, не будут ли эти решения особыми.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y''=yy'-y'^2. \tag{70}$$

Полагая $y'=z$ и принимая y за новую независимую переменную, будем иметь: $y''=\frac{dz}{dy}z$. Уравнение (70) приведется к уравнению *первого* порядка

$$\frac{dz}{dy}z=yz-z^2, \tag{71}$$

которое после сокращения на z примет вид

$$\frac{dz}{dy}=y-z \quad (z=0?). \tag{72}$$

Уравнение (72) линейное. Его общим решением будет

$$z=C_1e^{-y}+y-1. \tag{73}$$

Заменяя z на y', имеем:

$$y'=C_1e^{-y}+y-1. \tag{74}$$

Следовательно,

$$\int\frac{dy}{C_1e^{-y}+y-1}=x+C_2 \tag{75}$$

будет общим интегралом уравнения (70). Особых решений нет (почему?).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$y''^2+yy'y''-y'^3=0. \tag{76}$$

Полагая $y'=z$, $z=z(y)$, получим:

$$(zz')^2+yz^2z'-z^3=0, \tag{77}$$

или (сокращая на z^2)

$$z'^2+yz'-z=0 \quad (z^2=0?). \tag{78}$$

Интегрируя уравнение (78), найдем общее решение:

$$z = C_1 y + C_1^2 \tag{79}$$

и особое решение:

$$z = -\frac{y^2}{4}. \tag{80}$$

Заменяя в (79) и (80) z на y', получим:

$$y' = C_1 y + C_1^2; \quad y' = -\frac{y^2}{4}. \tag{81}$$

Интегрируя, найдем:

$$\frac{1}{C_1} \ln |C_1 y + C_1^2| = x + C_2. \tag{82}$$

— общее решение уравнения (76) и

$$y = \frac{4}{x + C}$$

— семейство особых решений.

Разыскивая решения вида $y = b$, положим в уравнении (76) $y = b$. Получим:

$$0^2 + b \cdot 0 \cdot 0 - 0^3 = 0. \tag{83}$$

Это равенство выполняется при любом b. Следовательно, любая прямая $y = b$ будет решением уравнения (76).

14. Уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{84}$$

в котором левая часть является однородной функцией относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, т. е.

$$F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}), \tag{85}$$

допускает понижение порядка на единицу при помощи подстановки

$$y' = yz, \tag{86}$$

где $z = z(x)$ есть новая неизвестная функция.

В самом деле, дифференцируя последовательно (86) и заменяя каждый раз y' на yz, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' &= y(z^3 + zz') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n)} &= y\omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Поэтому, выполняя в уравнении (84) подстановку (86) и пользуясь предположенной однородностью функции F, получим:

$$y^m F[x, 1, z, z^2 + z', \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})] = 0. \tag{88}$$

8*

Сокращая на y^m, получим уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$F[x, 1, z, z^2+z', \ldots, \omega(z, z', \ldots, z^{(n-1)})]=0 \quad (y^m=0?). \tag{89}$$

Пусть

$$z=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \tag{90}$$

есть общее решение уравнения (89). Тогда

$$y'=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\cdot y. \tag{91}$$

Интегрируя это однородное линейное уравнение, получим:

$$y=C_n e^{\int\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\,dx} \tag{92}$$

— *общее решение* уравнения (84).

Уравнение $y^m=0$ не приводит к особым решениям (почему?).

Особые решения уравнения (89) могут привести к особым решениям уравнения (84).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$yy''=y'^2+6xy^2. \tag{93}$$

Полагая $y'=yz$, имеем: $y''=y(z^2+z')$. Подставляя в уравнение (93) эти значения y' и y'' и сокращая на y^2, придем к уравнению первого порядка:

$$z'=6x, \tag{94}$$

откуда

$$z=3x^2+C_1. \tag{95}$$

Заменив z на $\frac{y'}{y}$, имеем:

$$y'=(3x^2+C_1)\,y. \tag{96}$$

Интегрируя, получим общее решение уравнения (93) в виде:

$$y=C_2e^{x^3+C_1x}. \tag{97}$$

Особых решений нет (почему?).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}\right)^2-x\left(\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}\right)+\frac{y'}{y}=0. \tag{98}$$

Полагая $y'=yz$, придем к уравнению:

$$z'^2-xz'+z=0. \tag{99}$$

Интегрируя, находим:

$$\left.\begin{aligned} &z=C_1x-C_1^2 \text{ — общее решение,}\\ &z=\frac{x^2}{4} \text{ — особое решение.}\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Заменим z на $\frac{y'}{y}$:

$$\left.\begin{aligned} y' &= (C_1 x - C_1^2) y, \\ y' &= \frac{x^2}{4} y. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Интегрируя, получим:

$$y = C_2 e^{\frac{C_1}{2} x^2 - C_1^2 x} \tag{102}$$

— **о б щ е е р е ш е н и е** уравнения (98);

$$y = C e^{\frac{x^3}{12}} \tag{103}$$

— семейство **о с о б ы х** решений уравнения (98).

15. Уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{104}$$

называется *обобщенным однородным*, если существует такое постоянное вещественное число k, что левая часть этого уравнения становится однородной функцией некоторой степени m относительно всех аргументов при условии, что x, y, y', ..., $y^{(n)}$ считаются величинами соответственно 1-го, k-го, $(k-1)$-го, ..., $(k-n)$-го измерений, так что при всех t выполняется тождество:

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \ldots, t^{k-n} y^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}). \tag{105}$$

Это уравнение допускает понижение порядка на единицу, ибо при помощи замены независимой переменной x и неизвестной функции y по формулам

$$x = e^t, \; y = z e^{kt}, \tag{106}$$

где t — новая независимая переменная, а z — новая неизвестная функция, $z = z(t)$, оно приводится к уравнению, не содержащему независимой переменной t.

Прежде чем выполнять в уравнении (104) подстановку (106), выразим производные от y по x через производные от z по t.

Для этого установим сначала связь между производной любой функции $w = w(x)$ по x и производной w по t, если заменить x через t по формуле $x = e^t$. Имеем:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{1}{e^t} = \frac{dw}{dt} e^{-t},$$

так что

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt} e^{-t}. \tag{107}$$

Таким образом, для нахождения производной от функции w по x ($x = e^t$) нужно найти производную от w по t и умножить ее на e^{-t}. Это правило можно записать символически так:

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} e^{-t}. \tag{108}$$

Пользуясь этим правилом, выразим производные от y по x через производные от z по t:

$$\left.\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t} = \frac{d}{dt}(ze^{kt})\, e^{-t} &= \left(\frac{dz}{dt} e^{kt} + kze^{kt}\right) e^{-t} = \\ &= \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{(k-1)t}, \\ y' &= \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{(k-1)t}; \\ y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} e^{-t} &= \left[\frac{d^2z}{dt^2} + (2k-1)\frac{dz}{dt} + k(k-1)z\right] e^{(k-2)t}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}\right) e^{(k-n)t}. \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

Выполняя теперь в уравнении (104) подстановку (106) и заменяя $y', \ldots, y^{(n)}$ найденными их выражениями через z, $\frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}$, согласно формулам (109), получим:

$$\begin{gathered} F\left[e^t,\ ze^{kt}, \left(\frac{dz}{dt} + kz\right) e^{(k-1)t}, \ldots, \right. \\ \left. \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}\right) e^{(k-n)t}\right] = 0. \end{gathered} \tag{110}$$

Воспользуемся тождеством (105), беря в качестве t функцию e^t:

$$e^{mt} F\left[1,\ z, \frac{dz}{dt} + kz, \ldots, \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)\right] = 0. \tag{111}$$

Сокращая на e^{mt}, придем к уравнению

$$F\left[1,\ z, \frac{dz}{dt} + kz, \ldots, \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)\right] = 0. \tag{112}$$

Это уравнение не содержит независимой переменной t. Оно допускает понижение порядка на единицу, согласно п. **13**.

Если, используя это понижение порядка (или понижая порядок другим способом), удастся проинтегрировать уравнение (112) в элементарных функциях, то, возвращаясь к переменным x и y по формулам

$$t = \ln x;\ z = \frac{y}{x^k}, \tag{113}$$

получим, что уравнение (104) тоже будет проинтегрировано в элементарных функциях.

Иногда уравнение (112) интегрируется и без предварительного понижения порядка.

В случае, когда $k=0$, подстановка (106) принимает вид

$$x=e^t,\ y=z, \tag{114}$$

так что по существу дело сводится только к замене независимой переменной x:

$$x=e^t. \tag{115}$$

При этом производные от y по x выразятся через производные от y по t следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt}e^{-t};\\ y'' &= \left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t};\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ y^{(n)} &= \omega\left(y,\ \frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \dots,\ \frac{d^ny}{dt^n}\right)e^{-nt}. \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Выполнив в уравнении (104) подстановку (115) и сокращая на e^{mt}, получим уравнение, не содержащее независимой переменной t, после интегрирования которого нужно заменить t на $\ln x$.

Наконец, может оказаться, что пригодно любое число k. В этом случае берут $k=0$, т. е. делают подстановку (115).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x^4y''-(x^3+2xy)\,y'+4y^2=0\quad (x>0). \tag{117}$$

Определим, будет ли уравнение (117) обобщенным однородным, т. е. существует ли указанное выше число k. Это число находится из условия равенства измерений всех членов уравнения (117) в предположении, что x, y, y' и y'' считаются величинами соответственно 1-го, k-го, $(k-1)$-го и $(k-2)$-го измерений.

При сделанном предположении члены уравнения (117) имеют следующие измерения:

$$\left.\begin{aligned} x^4y''&:\ 4+(k-2)=2+k,\\ -x^3y'&:\ 3+(k-1)=2+k,\\ -2xyy'&:\ 1+k+(k-1)=2k,\\ 4y^2&:\ \qquad 2k. \end{aligned}\right\} \tag{118}$$

Поэтому условие, которому должно удовлетворять число k, имеет вид:

$$2+k=2+k=2k=2k. \tag{119}$$

Это условие сводится к одному уравнению

$$2+k=2k, \tag{120}$$

откуда ясно, что число k существует: $k=2$, и, следовательно, уравнение (117) — **обобщенное однородное**. При этом все его члены будут иметь измерение $m=4$.

Выполняя в уравнении (117) подстановку

$$x=e^t,\ y=ze^{2t}, \tag{121}$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} y'&=\frac{dy}{dt}e^{-t}=\left(\frac{dz}{dt}e^{2t}+2ze^{2t}\right)e^{-t}=\left(\frac{dz}{dt}+2z\right)e^t;\\ y''&=\frac{dy'}{dt}e^{-t}=\left[\left(\frac{d^2z}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}\right)e^t+\left(\frac{dz}{dt}+2z\right)e^t\right]e^{-t}=\\ &=\frac{d^2z}{dt^2}+3\frac{dz}{dt}+2z.\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Поэтому уравнение (117) примет вид:

$$e^{4t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}+3\frac{dz}{dt}+2z\right)-(e^{3t}+2e^tze^{2t})\left(\frac{dz}{dt}+2z\right)e^t+4z^2e^{4t}=0, \tag{123}$$

или (сокращая на e^{4t})

$$z''+2z'-2zz'=0. \tag{124}$$

Это уравнение, как и следовало ожидать, не содержит независимой переменной t. Положим $z'=u$, $u=u(z)$. Тогда $z''=u'u$, и мы имеем:

$$u'u+2u-2zu=0. \tag{125}$$

Сократив на u, получаем:

$$u'=2z-2\quad (u=0?), \tag{126}$$

откуда

$$u=z^2-2z+C_1. \tag{127}$$

Но $u=z'$, поэтому

$$z'=z^2-2z+C_1. \tag{128}$$

Интегрируя, имеем:

$$\int\frac{dz}{z^2-2z+C_1}=t+C_2. \tag{129}$$

Значение интеграла, стоящего в левой части равенства (129), существенно зависит от характера корней уравнения

$$z^2-2z+C_1=0, \tag{130}$$

что в свою очередь определяется областью изменения произвольной постоянной C_1. Найдем вид общего решения уравнения (128), а следовательно, и уравнения (117) в каждом из трех возможных случаев.

1) Корни уравнения (130) — вещественные и различные. Тогда $1-C_1>0$. Введем вместо C_1 новую произвольную постоянную A_1, положив $1-C_1=A_1^2$. Имеем:

$$\int\frac{dz}{z^2-2z+C_1}=\int\frac{dz}{(z-1)^2+C_1-1}=\int\frac{dz}{(z-1)^2-A_1^2}=$$
$$=\frac{1}{2A_1}\ln\left|\frac{z-1-A_1}{z-1+A_1}\right| \tag{131}$$

(произвольная постоянная интеграции опущена). Поэтому (129) примет вид

$$\frac{1}{2A_1}\ln\left|\frac{z-1-A_1}{z-1+A_1}\right|=t+C_2, \tag{132}$$

или

$$\ln\left|\frac{z-1-A_1}{z-1+A_1}\right| = 2A_1 t + \ln|B_1'| \quad \left(\ln|B_1'| = 2A_1 C_2\right). \tag{133}$$

Разрешая относительно z, имеем

$$\frac{z-1-A_1}{z-1+A_1} = B_1 e^{2A_1 t} \left(B_1 = \pm B_1'\right), \tag{134}$$

откуда

$$z = \frac{1+A_1 - B_1(1-A_1)e^{2A_1 t}}{1-B_1 e^{2A_1 t}}. \tag{135}$$

Возвращаясь к переменным x и y по формулам

$$t = \ln x, \; z = \frac{y}{x^2}, \tag{136}$$

найдем общее решение уравнения (117) в виде

$$y = \frac{(1+A_1)x^2 - B_1(1-A_1)x^{2A_1+2}}{1-B_1 x^{2A_1}}. \tag{137}$$

2) Корни уравнения (130) комплексные. В этом случае $1 - C_1 < 0$. Полагая $C_1 - 1 = A_1^2$, имеем:

$$\int \frac{dz}{z^2 - 2z + C_1} = \int \frac{dz}{(z-1)^2 + A_1^2} = \frac{1}{A_1} \operatorname{arctg} \frac{z-1}{A_1}, \tag{138}$$

так что (129) примет вид

$$\frac{1}{A_1} \operatorname{arctg} \frac{z-1}{A_1} = t + C_2, \tag{139}$$

откуда

$$z = 1 + A_1 \operatorname{tg}[A_1(t+C_2)] \quad \left(-\frac{\pi}{2} < A_1(t+C_2) < \frac{\pi}{2}\right). \tag{140}$$

Поэтому

$$y = x^2\{1 + A_1 \operatorname{tg}[A_1 \ln(|B_2|x)]\} \quad (C_2 = \ln|B_2|) \tag{141}$$

будет общим решением уравнения (117).

3) Корни уравнения (130) кратные. Тогда $C_1 = 1$. Равенство (129) примет вид

$$\frac{1}{1-z} = t + C_2, \tag{142}$$

откуда

$$z = 1 - \frac{1}{t+C_2}. \tag{143}$$

Поэтому уравнение (117) имеет семейство решений

$$y = x^2\left(1 - \frac{1}{\ln x + C_2}\right). \tag{144}$$

Рассмотрим, наконец, равенство $u = 0$, стоящее в скобках в формуле (126). Так как $u = z'$, то имеем $z' = 0$, откуда $z = C$. Но $z = \frac{y}{x^2}$, поэтому уравнение (117) имеет семейство решений $y = Cx^2$. Эти решения частные, ибо все решения уравнения (117) заведомо частные (почему?).

Пример 2. Проинтегрировать уравнение

$$xyy'' + yy' + x^2y'^3 = 0. \tag{145}$$

Число k (если оно существует) должно удовлетворять условию

$$1 + k + (k-2) = k + (k-1) = 2 + 3(k-1)$$

или

$$2k - 1 = 3k - 1, \tag{146}$$

откуда следует, что $k = 0$. Уравнение (145) — обобщенное однородное.

Делаем замену независимой переменной

$$x = e^t. \tag{147}$$

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} y' &= y'_t e^{-t}, \\ y'' &= \left(y''_{t^2} - y'_t\right) e^{-2t}. \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

Поэтому уравнение (145) примет вид

$$yy'' + y'^3 = 0 \quad [y = y(t)]. \tag{149}$$

Положив $y' = z$; $z = z(y)$, получим:

$$yz'_y z + z^3 = 0, \tag{150}$$

или

$$yz'_y + z^2 = 0 \quad (z = 0?), \tag{151}$$

откуда

$$z = \frac{1}{\ln y - C_1}, \tag{152}$$

но $z = y'$, поэтому

$$y' = \frac{1}{\ln y - C_1}. \tag{153}$$

Интегрируя уравнение (153), имеем:

$$y \ln y + A_1 y = t + A_2 \quad (A_1 = -1 - C_1). \tag{154}$$

Заменяя t на $\ln x$, получим:

$$y \ln y + A_1 y = \ln x + A_2. \tag{155}$$

Это есть общий интеграл уравнения (145).

Равенство $z = 0$ приводит к семейству решений $y = C$, которые не содержатся в общем интеграле (155).

Пример 3. Пусть дано уравнение

$$x^2 y'' + xy' + y = 0. \tag{156}$$

Определим, будет ли оно обобщенным однородным. Имеем:

$$2 + k - 2 = 1 + k - 1 = k, \tag{157}$$

или

$$k = k = k, \tag{158}$$

так что уравнение (156) является обобщенным однородным, причем в качестве k можно брать любое число. Возьмем $k = 0$.

Выполняя в уравнении (156) подстановку $x = e^t$, придем к уравнению

$$y'' + y = 0 \quad [y = y(t)]. \tag{159}$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y'=z,\ z=z(y);\ z\frac{dz}{dy}+y=0,\ z^2+y^2=C_1^2,\\ z=\pm\sqrt{C_1^2-y^2}. \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

Заменим z на y':

$$y'=\pm\sqrt{C_1^2-y^2}. \tag{161}$$

Интегрируя, найдем:

$$y=C_1\sin(\pm t+C_2)\ \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\pm t+C_2\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \tag{162}$$

Заменяя t на $\ln x$, получим общий интеграл уравнения (156) в виде

$$y=C_1\sin(\pm\ln x+C_2) \tag{163}$$

или

$$y=A_1\sin(\ln x+A_2)\quad (A_1=\pm C_1,\ A_2=\pm C_2). \tag{164}$$

16. Если левая часть уравнения

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{165}$$

является точной производной от некоторой функции переменных $x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$,

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=\frac{d}{dx}\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}), \tag{166}$$

то оно называется *уравнением в точных производных*. Соотношение

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})=C_1 \tag{167}$$

будет первым интегралом уравнения (165).

Если уравнение (165) не является уравнением в точных производных, то во многих случаях удается привести это уравнение к уравнению в точных производных путем умножения левой части его на соответствующую функцию $\mu=\mu(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ — *интегрирующий множитель* уравнения (165), так что

$$\mu F=\frac{d\Phi}{dx}. \tag{168}$$

Так же как и в случае уравнения 1-го порядка, обращение μ в бесконечность или в нуль может привести соответственно к особым и посторонним решениям уравнения (165).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$yy''+y'^2-\frac{2yy'}{x}+\frac{y^2}{x^2}=0. \tag{169}$$

Так как

$$yy''+y'^2=(yy')';\qquad -\frac{2yy'}{x}+\frac{y^2}{x^2}=\left(-\frac{y^2}{x}\right)', \tag{170}$$

то уравнение (169) является уравнением в точных производных, ибо его можно записать так:

$$\left(yy' - \frac{y^2}{x}\right)' = 0. \tag{171}$$

Отсюда

$$yy' - \frac{y^2}{x} = C_1. \tag{172}$$

Этот первый интеграл является дифференциальным уравнением первого порядка. Интегрируя его, получим:

$$y^2 = C_2x^2 - 2C_1x. \tag{173}$$

Это есть общий интеграл уравнения (169). Его можно переписать так:

$$y^2 = A_2x^2 + A_1x \quad (A_1 = -2C_1,\ A_2 = C_2). \tag{174}$$

Особых решений нет.

Пример 2. Уравнение

$$y'y''' - y''^2 = 0 \tag{175}$$

не является уравнением в точных производных. Но, переписав его в виде

$$\frac{y'''}{y''} - \frac{y''}{y'} = 0, \tag{176}$$

получаем уравнение точных производных, ибо

$$\frac{y'''}{y''} = (\ln|y''|)'; \quad \frac{y''}{y'} = (\ln|y'|)', \tag{177}$$

а функция

$$\mu = \frac{1}{y'y''} \tag{178}$$

есть интегрирующий множитель уравнения (175).

Первым интегралом уравнения (175) будет

$$\ln|y''| - \ln|y'| = \ln|C_1|, \tag{179}$$

или

$$y'' = A_1y' \quad (A_1 = \pm C_1), \tag{180}$$

откуда

$$y' = A_2 e^{A_1x}. \tag{181}$$

Интегрируя еще раз, получаем:

$$y = \frac{A_2}{A_1} e^{A_1x} + A_3. \tag{182}$$

Особых решений нет (почему?).

Пример 3. Уравнение второго порядка, разрешенное относительно y'' и не содержащее ни x ни y:

$$y'' = f(y), \tag{183}$$

имеет интегрирующий множитель $\mu = 2y'$.

Действительно, умножая обе части этого уравнения на $2y'$, имеем:

$$2y'y'' = 2f(y)\,y', \tag{184}$$

или

$$\left(y'^2\right)' = \left(2\int f(y)\,dy\right)'. \tag{185}$$

Поэтому

$$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C_1. \tag{186}$$

Интегрируя еще раз, найдем общий интеграл уравнения (183).

Пример 4. Линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)\,y' + p'(x)\,y = f(x), \tag{187}$$

в котором коэффициент при y есть производная от коэффициента при y', является уравнением в точных производных.

Его первым интегралом будет

$$y' + p(x)\,y = \int f(x)\,dx + C_1. \tag{188}$$

Интегрируя это (линейное) уравнение еще раз, найдем общее решение уравнения (187).

§ 3. ЗАДАЧИ

Матвеев. Сборник задач, №№ **521, 523, 525—527, 529, 531—533, 536, 537, 542, 543, 546, 548, 551—554, 557, 558, 560—565, 567, 569.**

ГЛАВА IV

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Нормальная система и ее решение. **2.** Геометрическое и механическое истолкования нормальной системы. **3.** Задача Коши. **4.** Достаточное условие существования решения задачи Коши. **5.** Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши. **6.** Общее решение. **7.** Частное решение. **8.** Особое решение. **9.** Интегралы и первые интегралы нормальной системы. Общий интеграл. **10.** Число независимых интегралов (первых интегралов). **11.** Понижение порядка системы при помощи известных первых интегралов. **12.** Приведение уравнения n-го порядка к нормальной системе n уравнений первого порядка и обратно. **13.** Каноническая система дифференциальных уравнений. Приведение ее к нормальной системе.

§ 2. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

14. Понятие о системе уравнений в симметрической форме. Приведение нормальной системы к системе в симметрической форме. **15.** Интегралы, первые интегралы и общий интеграл системы дифференциальных уравнений в симметрической форме. **16.** Связь между автономной системой и соответствующей ей системой в симметрической форме.

§ 3. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

17. Непосредственное и последовательное интегрирование. **18.** Метод исключения. **19.** Интегрируемые комбинации.

§ 4. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования, гл. IV, пп. **101—117**.
Степанов, гл. VII, §§ 1, 4, 5.
Эльсгольц, гл. III, §§ 1—3.

Дополнительная

Петровский, гл. IV, §§ 28, 29.
Понтрягин, гл. I, §§ 3, 4.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Если система n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями $y_1, y_2, \ldots, y_n$ от независимой переменной x разрешена относительно производных этих функций, то она называется *нормальной системой* и имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

или короче:

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1')$$

Здесь $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — известные функции $n+1$ независимых переменных, относительно которых мы будем предполагать, что они определены и непрерывны в рассматриваемой области. Число уравнений системы (1) называется *порядком* ее.

Систему (1) можно записать в векторной форме, если ввести в рассмотрение неизвестный вектор $\bar{y}$, составляющими которого являются искомые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\bar{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \qquad (2)$$

и вектор $\bar{f}(x, \bar{y})$, составляющие которого суть известные функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$, стоящие в правых частях системы (1):

$$\bar{f}(x, \bar{y}) = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}. \qquad (3)$$

Определив производную от вектора $\bar{y}$ как вектор, у которого каждая составляющая есть производная соответствующей составляющей вектора $\bar{y}$:

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\left\{\frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx},\ \ldots,\ \frac{dy_n}{dx}\right\}, \tag{4}$$

можно переписать систему (1) в следующей *векторной форме*:

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\bar{f}(x,\ \bar{y}). \tag{5}$$

Если правые части системы (1) не зависят от независимой переменной x:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=f_1(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ \frac{dy_2}{dx}&=f_2(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dy_n}{dx}&=f_n(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то такая система называется *автономной* (*стационарной*).

Автономная система (6) записывается в векторной форме так:

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\bar{f}(\bar{y}). \tag{7}$$

Решением системы (1) в интервале $(a,\ b)$ называется совокупность n функций

$$y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x), \tag{8}$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в этом интервале и обращающих все уравнения системы (1) в тождества, справедливые для всех значений x из $(a,\ b)$.

Решение векторного уравнения (5), соответствующего системе (1), определяется как вектор

$$\bar{y}=\bar{y}(x) \tag{9}$$

с составляющими

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x), \tag{10}$$

обращающий векторное уравнение (5) в тождество

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx}\equiv\bar{f}[x,\ \bar{y}(x)] \quad (a<x<b). \tag{11}$$

2. Кривая в $(n+1)$-мерном пространстве $(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, соответствующая решению (8), называется *интегральной кри-*

вой уравнения (1). Она обладает тем свойством, что направляющие косинусы касательной к ней пропорциональны числу 1 и значениям правых частей системы (1) в точке касания (почему?).

Если через каждую точку $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, в которой заданы правые части системы (1), провести отрезок, направляющие косинусы которого пропорциональны числам $1, f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то получим *поле направлений*. Задача интегрирования системы (1) состоит, таким образом, в том, чтобы по этому полю направлений найти интегральные кривые.

Чтобы дать механическое истолкование нормальной системы, рассмотрим систему вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

или

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{X}(t, \bar{x}) \tag{13}$$

$$[\bar{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \ \bar{X}(t, \bar{x}) = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}],$$

где независимая переменная есть время t, а искомые функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки n-мерного пространства. Это пространство называется *фазовым пространством*.

Для системы двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(t, x, y) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

роль фазового пространства играет плоскость (x, y), которая называется *фазовой плоскостью*.

Всякое решение

$$x_1 = x_1(t), \ x_2 = x_2(t), \ \ldots, \ x_n = x_n(t) \tag{15}$$

системы (12) представляет собой некоторый закон движения точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в фазовом пространстве и называется *движением*, определяемым системой (12), а путь, описываемый точкой M в фазовом пространстве (на фазовой плоскости), — *траекторией* этого движения. Уравнения движения (15) являются вместе с тем и параметрическими уравнениями его траектории. Таким образом, траектория движения есть проекция движения из пространства $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в фазовое пространство $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Если существует точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ такая, что

$$X_k(t, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \equiv 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

при всех t или при всех $t \geqslant t_0$, то система (12) определяет движение

$$x_1 \equiv x_1^{(0)}, \ x_2 \equiv x_2^{(0)}, \ \ldots, \ x_n \equiv x_n^{(0)}. \tag{17}$$

Такое движение называется *состоянием покоя*. Траекторией этого движения будет точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — ***точка покоя***, или ***точка равновесия***.

Движение (15) обладает тем свойством, что составляющие скорости этого движения

$$\frac{dx_1}{dt}, \ \frac{dx_2}{dt}, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dt} \tag{18}$$

в момент времени t равны значениям правых частей системы (12) в точке $[t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$.

Пользуясь уравнениями системы (12), мы можем вычислить значения величин (18) в каждой точке $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в которой правые части системы (12) определены. Поэтому говорят, что система (12) задает некоторое *поле скоростей*. Задача интегрирования системы (12) состоит в нахождении движений по заданному полю скоростей.

В случае, когда время t не входит явно в правые части системы (12), т. е. когда мы имеем автономную (стационарную) систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

или

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{X}(\bar{x}), \tag{20}$$

скорость движения в данной точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с течением времени не изменяется.

Вследствие этого движения, определяемые автономной системой, обладают следующим замечательным свойством. Если (15) есть движение, определяемое системой (19), то

$$x_1 = x_1(t+\tau),\ x_2 = x_2(t+\tau),\ \ldots,\ x_n = x_n(t+\tau) \quad (\tau = \mathrm{const}) \tag{21}$$

тоже будет движением, определяемым этой системой. Движения (15) и (21) при $\tau \neq 0$ различны, в то время как их траектории совпадают. Если в движении (21) движущаяся точка занимает положение $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в момент времени $t=0$, то в движении (15) она занимает это положение в момент времени $t=\tau$. При этом в обоих движениях движущаяся точка проходит через точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ с одной и той же скоростью.

На одной и той же траектории (ввиду произвольности выбора τ) можно задать бесконечное множество движений.

Всякое решение $x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n = x_n^{(0)}$ системы

$$\left.\begin{array}{l} X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{22}$$

определяет движение, вырождающееся в состояние покоя, а точка $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является траекторией этого движения.

Пример 1. Система

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x \tag{23}$$

определяет движение *

$$x = \cos t; \quad y = \sin t. \tag{24}$$

Траекторией этого движения является окружность

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{25}$$

на фазовой плоскости (x, y), изображенная на рис. 36, причем здесь, как и в дальнейшем, стрелки указывают направление движения при возрастании t. Это направление можно установить как из уравнений движения (24), так и из самой системы (23). Действительно, например, для точки (x, y), лежащей в первой четверти, имеем:

$$\frac{dx}{dt} < 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0, \tag{26}$$

так что абсцисса движущейся точки убывает, а ордината возрастает, в результате чего движение происходит против часовой стрелки.

Заменив в уравнениях (24) время t на $t+\tau$, получим движение

$$x = \cos(t+\tau), \quad y = \sin(t+\tau), \tag{27}$$

определяемое системой (23). Это движение имеет ту же траекторию (25), что и движение (24), и происходит также против часовой стрелки. Но если

---

* Действительно, подставляя (24) в (23), получаем тождества $-\sin t \equiv -\sin t$, $\cos t \equiv \cos t$.

в движении (27) движущаяся точка занимает положение (x_0, y_0) в момент времени $t=0$, то в движении (24) она занимает это положение в момент времени $t=\tau$, так что при $\tau > 0$ она проходит через положение (x_0, y_0) позднее, но с той же самой скоростью.

Система (23) определяет движение

$$x = 0, \quad y = 0 \tag{28}$$

—состояние покоя. Траекторией этого движения является точка (0, 0) — начало координат.

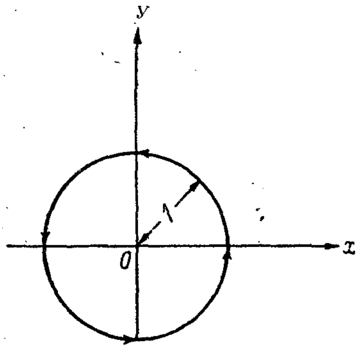

Рис. 36.

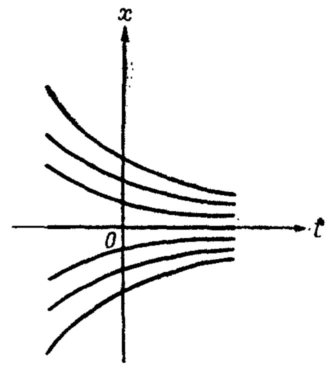

Рис. 37.

Если мы имеем не систему уравнений вида (12), а только о д н о уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{29}$$

то, как указывалось ранее (см. гл. I, п. 3), оно представляет собой (заданный в дифференциальной форме) закон движения точки по оси Ox. Траекториями движений, определяемых уравнением (29), являются отрезки оси Ox, представляющие собой проекции движений на ось Ox.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt}=-x. \tag{30}$$

Это уравнение определяет семейство движений

$$x=Ce^{-t} \text{ или } x=x_0e^{-t} \quad [x_0=x(0)] \tag{31}$$

(рис. 37), в том числе и состояние покоя

$$x = 0. \tag{32}$$

Траекториями этих движений являются полуоси оси Ox и точка $x=0$. Они являются проекциями соответствующих движений (интегральных кривых) (31) на ось Ox.

3. *Задача Коши* для системы (1):

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

ставится так. Среди всех решений системы (1) найти решение (8)

$$y_1=y_1(x), \ y_2=y_2(x), \ \ldots, \ y_n=y_n(x),$$

удовлетворяющее *начальным условиям*

$$y_1=y_1^{(0)}, \ y_2=y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n=y_n^{(0)} \text{ при } x=x_0, \tag{33}$$

где *начальные данные* $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ суть заданные, числа.

Если систему (1) переписать в векторной форме (5),

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\bar{f}(x, \bar{y}),$$

то задача Коши состоит в нахождении вектора (9),

$$\bar{y}=\bar{y}(x),$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$\bar{y}(x)=\bar{y}^{(0)} \text{ при } x=x_0, \tag{34}$$

где составляющие *начального вектора* $\bar{y}^{(0)}$ суть заданные начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ составляющих вектора $\bar{y}$. при заданном начальном значении x_0 независимой переменной x.

Геометрически задача Коши состоит в том, чтобы из всей совокупности интегральных кривых системы (1) найти кривую, проходящую через заданную точку $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$.

Механически задача Коши состоит в том, чтобы среди всех движений, определяемых системой (12):

$$\frac{dx_k}{dt}=X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

или (13):

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\bar{X}(t, \bar{x}),$$

найти движение (15):

$$x_1=x_1(t), \quad x_2=x_2(t), \ \ldots, \ x_n=x_n(t)$$

или

$$\bar{x}=\bar{x}(t), \tag{15'}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x_1=x_1^{(0)}, \ x_2=x_2^{(0)}, \ \ldots, \ x_n=x_n^{(0)} \text{ при } t=t_0 \tag{35}$$

или

$$\bar{x} = \bar{x}^{(0)} \text{ при } t = t_0, \tag{35'}$$

т. е. найти такое движение, в котором движущаяся точка занимает заданное положение $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в фазовом пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в заданный момент времени $t = t_0$.

В случае системы двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(t, x, y) \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

задача Коши состоит в нахождении движения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{37}$$

определяемого этой системой и удовлетворяющего начальным условиям

$$x = x_0, \quad y = y_0 \text{ при } t = t_0, \tag{38}$$

т. е. ищется движение (37), в котором движущаяся точка занимает положение (x_0, y_0) на фазовой плоскости (x, y) в момент времени $t = t_0$.

Особые случаи задачи Коши, отмеченные в гл. I, п. **4**, распространяются и на систему дифференциальных уравнений.

4. Так же как и в случае одного уравнения первого порядка в нормальной форме $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (гл. I, п. **5**), для того чтобы гарантировать существование хотя бы одного решения нормальной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего поставленным начальным условиям, достаточно предположить, что правые части системы непрерывны в окрестности начальной точки $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Теорема Пеано. *Если правые части системы* (1).

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{39}$$

определены и непрерывны в параллелепипеде

$$|x - x_0| \leqslant a; \ |y_k - y_k^{(0)}| \leqslant b \ (a > 0, \ b > 0, \ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{40}$$

и, следовательно, ограничены в нем:

$$|f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant M \quad (M > 0, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{41}$$

то система (1) *имеет хотя бы одно решение*

$$y_k = y_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{42}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_k = y_k^{(0)} \text{ при } x = x_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{43}$$

заведомо определенное (и непрерывно дифференцируемое) в интервале

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{44}$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \tag{45}$$

5. Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши для системы (1), нужно наложить на правые части этой системы дополнительные ограничения. Простейшим из таких ограничений является требование существования ограниченных частных производных от правых частей системы (1) по $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Теорема Пикара (упрощенная формулировка). *Если правые части системы* (1) *определены в области* (40) *и удовлетворяют в ней двум условиям:*

1) $f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ *непрерывны;*

2) *частные производные* $\frac{\partial f_k}{\partial y_l}$ $(k, l=1, 2, \ldots, n)$ *существуют и ограничены*

$$\left|\frac{\partial f_k}{\partial y_l}\right| \leqslant K \ (k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{46}$$

то система (1) *имеет единственное решение* (42), *удовлетворяющее начальным условиям* (43), *заведомо определенное (и непрерывно дифференцируемое) заведомо в интервале* (44).

Условия теоремы Пикара заведомо выполнены, если правые части системы (1) суть полиномы относительно всех аргументов $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ или хотя бы относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$. При этом начальные значения искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ можно задавать совершенно произвольно. Что касается начального значения независимой переменной x, то в первом случае его тоже можно задавать совершенно произвольно, а во втором случае за начальное значение x можно брать любое число из интервала непрерывности всех коэффициентов указанных полиномов (почему?).

Отметим, однако, что даже в случае, когда правые части системы (1) являются полиномами относительно всех аргументов, существование решения задачи Коши гарантируется лишь в некоторой окрестности начального значения независимой переменной.

Пример. Система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{47}$$

где P и Q — полиномы относительно x и y, определяет единственное движение, в котором движущаяся точка проходит через (любую) заданную точку (x_0, y_0) фазовой плоскости (x, y) в (любой) заданный момент времени $t = t_0$. Однако это движение определено, вообще говоря, не при всех t.

6. Рассмотрим область D изменения переменных x, y_1, y_2, ..., y_n, через каждую точку которой проходит одна, и только одна, интегральная кривая системы (1).

Определение. Совокупность n функций

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{array}\right\} \tag{48}$$

определенных в некоторой области изменения переменных x, C_1, C_2, ..., C_n и непрерывно дифференцируемых относительно x, называется *общим решением* системы (1) в области D, если она удовлетворяет двум условиям:

1) система (48) разрешима в области D относительно произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n); \end{array}\right\} \tag{49}$$

2) совокупность функций (48) является решением системы (1) при всех значениях произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, доставляемых формулами (49), когда точка $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пробегает область D.

Знание общего решения (48) дает возможность решить любую задачу Коши с начальными данными из области D. Действительно, пусть $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ — любая точка из D. Подставляя в систему (48) вместо x, y_1, y_2, ..., y_n числа x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(0)} = \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2^{(0)} = \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(0)} = \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{array}\right\} \tag{50}$$

Разрешая систему (50) относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, найдем:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \psi_1(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \equiv C_1^{(0)}, \\ C_2 &= \psi_2(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \equiv C_2^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= \psi_n(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \equiv C_n^{(0)}. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Подставляя найденные значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в общее решение (48), получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}). \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Это есть решение, проходящее через точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, причем других решений, проходящих через эту точку, нет.

Общее решение вида

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ y_2 &= \varphi_2(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

где $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ играют роль произвольных постоянных, а число x_0 фиксировано, называется ***общим решением в форме Коши***. Его можно получить из общего решения (48), решая указанным выше способом задачу Коши с начальными данными $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ из области D, фиксируя в полученном решении x_0 и рассматривая $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ как произвольные постоянные.

Можно доказать, что при условиях теоремы Пикара существует общее решение в форме Коши, определенное в некоторой окрестности начальной точки (см. гл. V, п. 11).

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y; \quad \frac{dy}{dt} = x. \qquad (54)$$

Проверим, что совокупность функций

$$\left.\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y &= C \sin t - C_2 \cos t \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

является общим решением системы (54) в области

$$|t| < +\infty, \quad |x| < +\infty, \quad |y| < +\infty. \qquad (56)$$

Функции (55) определены при всех значениях t, C_1 и C_2 и непрерывно дифференцируемы по t. Чтобы доказать, что они дают общее решение системы (54) в области (56), заметим прежде всего, что через каждую точку области (56) проходит одна, и только одна, интегральная кривая системы (54) (почему?), так что область (56) можно рассматривать в качестве области D.

Проверим, что функции (55) удовлетворяют обоим условиям, указанным в определении общего решения:

1) система (55) разрешима в области (56) относительно произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= x\cos t + y\sin t, \\ C_2 &= x\sin t - y\cos t; \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

2) функции (55) образуют решение системы (54) при любых значениях C_1 и C_2, в чем легко убедиться непосредственно, подставляя (55) в (54).

Следовательно, функции (55) образуют общее решение системы (54) в области (56).

Преобразуем общее решение (55) в общее решение в форме Коши. Найдем, пользуясь формулой (55), решение задачи Коши с любыми начальными значениями x_0 и y_0 искомых функций x и y при некотором фиксированном значении независимой переменной t, например при $t=0$. Полагая в (55) $t=0$, $x=x_0$, $y=y_0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= C_1, \\ -y_0 &= C_2, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

откуда $C_1=x_0$, $C_2=-y_0$. Подставляя эти значения C_1 и C_2 в общее решение (55), получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0\cos t - y_0\sin t, \\ y &= x_0\sin t + y_0\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Это и есть **общее решение** [в области (56)] **в форме Коши**. Роль произвольных постоянных играют x_0 и y_0.

Из формул общего решения (55) и (59) следует, что система (54) определяет бесчисленное множество движений, в том числе и состояние покоя

$$x\equiv 0;\ y\equiv 0, \tag{60}$$

и что траекториями этих движений являются окружности

$$x^2+y^2=C_1^2+C_2^2 \quad \text{или} \quad x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \tag{61}$$

и начало координат. Движения по всем окружностям происходят против часовой стрелки (Ср. п. 2, пример 1.)

7. Решение (42) называется *частным*, если через любую точку его не проходит никакое другое решение системы, так что в каждой точке этого решения имеет место единственность решения задачи Коши.

Например, всякое решение системы (1) с полиномиальными правыми частями является частным решением (почему?).

Решение задачи Коши, найденное из формулы общего решения (48), всегда является частным решением (почему?).

8. Решение (42) называется *особым*, если в каждой точке его нарушена единственность решения задачи Коши. В окрестности каждой точки особого решения должно быть нарушено хоть одно из условий теоремы Пикара (почему?).

Система (1) с полиномиальными правыми частями не может иметь особых решений.

9. Дадим два определения интеграла системы (1),

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,(k=1, 2, \ldots, n).$$

Первое определение. Функция

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{62}$$

называется *интегралом* системы (1), если она ни в какой области не вырождается в тождественную постоянную и если она принимает одно и то же значение во всех точках каждого частного решения.

Пример 1. Рассмотрим систему (54),

$$\frac{dx}{dt}=-y, \quad \frac{dy}{dt}=x.$$

Каждая из функций, стоящих в правых частях равенств (57), является интегралом системы (54), так что мы имеем два интеграла:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1&=x\cos t+y\sin t,\\ \psi_2&=x\sin t-y\cos t.\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Действительно, подставляя в функции ψ_1 и ψ_2 вместо x и y частное решение

$$\left.\begin{aligned}x&=C_1^{(0)}\cos t+C_2^{(0)}\sin t,\\ y&=C_1^{(0)}\sin t-C_2^{(0)}\cos t,\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1|_{(64)}&=(C_1^{(0)}\cos t+C_2^{(0)}\sin t)\cos t+(C_1^{(0)}\sin t-C_2^{(0)}\cos t)\sin t\equiv C_1^{(0)},\\ \psi_2|_{(64)}&\equiv C_2^{(0)}.\end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Второе определение. Функция $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными по всем аргументам в области D изменения переменных x, y_1, $y_2, \ldots, y_n$, причем такая, что ее частные производные по y_1, $y_2, \ldots, y_n$ не обращаются одновременно в нуль, называется *интегралом* системы (1) в области D, если ее полный дифференциал

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}dy_k \tag{66}$$

обращается тождественно в нуль в силу системы (1), т. е. при замене dy_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ их значениями из системы (1), так что

$$d\psi|_{(1)}=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial y_k}f_k dx\equiv 0. \tag{67}$$

Условие (67) равносильно тому, что полная производная от ψ по x:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dx}, \tag{68}$$

вычисленная в силу системы (1), тождественно равна нулю, т. е.

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{(1)} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial y_k} f_k \equiv 0. \tag{69}$$

Последнее означает, что интеграл ψ является решением уравнения с частными производными первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial u}{\partial y_k} = 0. \tag{70}$$

Таким образом, мы приходим к следующему *аналитическому критерию* (непрерывно дифференцируемого) *интеграла*. Для того чтобы функция $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ была интегралом системы (1), она должна быть решением уравнения с частными производными (70).

Если функция ψ есть интеграл системы (1) в смысле второго определения, то она будет интегралом и в смысле первого определения (почему?).

Пример 2. Покажем, что функции (63) являются интегралами системы (54) в смысле второго определения.

В самом деле:

$$\left.\begin{aligned} d\psi_1|_{(54)} = (-x\sin t + y\cos t)\,dt + \cos t\cdot(-y\,dt) + \sin t\cdot(x\,dt) \equiv 0,\\ d\psi_2|_{(54)} \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Уравнение (70) принимает для системы (54) вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{72}$$

Интегралы (63) должны быть решениями этого уравнения. И в самом деле, полагая в уравнении (72)

$$u = \psi_1 = x\cos t + y\sin t, \tag{73}$$

получим тождество:

$$-x\sin t + y\cos t - y\cos t + x\sin t \equiv 0. \tag{74}$$

Аналогичное тождество получим и для интеграла ψ_2.

Интегралы

$$\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\quad \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots,\\ \psi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{75}$$

определенные в одной и той же области D, называются *независимыми* в этой области, если не существует соотношения вида

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k) = 0, \tag{76}$$

которое выполнялось бы тождественно в области D или в области D_0, содержащейся внутри D.

Соотношение

$$\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C, \tag{77}$$

где ψ интеграл системы (1), а C — произвольная постоянная, называется *первым интегралом* этой системы.

Первые интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \\ &\psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\psi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_k \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

называются *независимыми* в области D, если входящие в них интегралы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ независимы в этой области.

Совокупность n независимых первых интегралов системы (1) называется *общим интегралом* этой системы.

Разрешая общий интеграл относительно искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, получим общее решение системы (1).

Пример 3. Система (54):

$$\frac{dx}{dt} = -y; \quad \frac{dy}{dt} = x$$

имеет два первых интеграла

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &\equiv x\cos t + y\sin t = C_1, \\ \psi_2 &\equiv x\sin t - y\cos t = C_2. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Эти первые интегралы независимы, ибо интегралы ψ_1 и ψ_2 независимы. Совокупность этих первых интегралов является общим интегралом системы (54).

Разрешая (79) относительно x и y, получим общее решение (55) системы (54).

10. *Если*

$$\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \psi_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{80}$$

— *непрерывно дифференцируемые интегралы системы* (1), *то любая непрерывно дифференцируемая функция от них*

$$\psi = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k), \tag{81}$$

производные которой по $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ *не обращаются одновременно в нуль, тоже будет интегралом системы* (1).

В самом деле, имеем:

$$d\psi|_{(1)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial\psi_i}d\psi_i|_{(1)}\equiv 0,\ d\psi|_{(1)}\equiv 0. \tag{82}$$

Нормальная система n уравнений не может иметь более, чем n независимых интегралов (первых интегралов). (Матвеев. Методы интегрирования, п. **111**).

Пример. Система (54) наряду с независимыми интегралами (63) допускает еще интеграл

$$\psi=x^2+y^2, \tag{83}$$

ибо

$$d\psi|_{(54)}=2x(-ydt)+2y(xdt)\equiv 0. \tag{84}$$

Но интегралы (63) и (83) уже зависимы между собой. Действительно, мы имеем:

$$\psi=\psi_1^2+\psi_2^2. \tag{85}$$

Если правые части системы (1) *непрерывны вместе с частными производными по всем аргументам, то она имеет ровно n независимых интегралов, определенных и непрерывно дифференцируемых в некотором параллелепипеде с центром в начальной точке* $\left(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \dots,\ y_n^{(0)}\right)$ (см. ниже, гл. V, п. **12**).

11. Если для системы (1) найден первый интеграл

$$\psi_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n)=C, \tag{86}$$

то, разрешив его относительно одной из переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$, например относительно y_1, получим:

$$y_1=\varphi(x,y_2,\dots,y_n). \tag{87}$$

Подставив это значение y_1 в последние $n-1$ уравнения системы (1), придем к нормальной системе $n-1$ уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy_2}{dx}=f_2^*(x,y_2,\dots,y_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dy_n}{dx}=f_n^*(x,y_2,\dots,y_n)\end{array}\right\} \tag{88}$$

с неизвестными функциями $y_2,\dots,y_n$. Таким образом, *знание одного первого интеграла нормальной системы дает возможность понизить ее порядок на единицу.*

Знание k независимых первых интегралов системы (1) *дает возможность понизить ее порядок на k единиц* (почему?).

12. Всякое уравнение n-го порядка можно привести к системе n уравнений первого порядка.

Пусть дано уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (89)$$

Обозначим искомую функцию y через y_1 и примем производные от искомой функции $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ за новые неизвестные функции, положив

$$y'=y_2,\ y''=y_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_n. \qquad (90)$$

Составим систему дифференциальных уравнений для функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}=y'=y_2,\ \frac{dy_2}{dx}=y''=y_3,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-1}}{dx}=y^{(n-1)}=y_n,\\ &\frac{dy_n}{dx}=y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})=\\ &=f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

Поэтому для функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ получим следующую нормальную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\ &\frac{dy_2}{dx}=y_3,\\ &\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &\frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n,\\ &\frac{dy_n}{dx}=f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Эту систему будем называть ***нормальной системой, соответствующей уравнению n-го порядка*** (89).

Обратно, всякую нормальную систему (1) можно, вообще говоря, привести к одному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией, если дифференцировать последовательно $n-1$ раз одно из уравнений системы (1), например первое, заменяя после каждого дифференцирования производные $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ их значениями из системы (1), и исключить из первого уравнения системы (1) и полученных $n-1$ уравнений переменные $y_2, y_3, \ldots, y_n$. Если при этом действительно получится уравнение n-го порядка

$$y_1^{(n)}=f\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}\right) \qquad (93)$$

и если удастся найти его общее решение

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{94}$$

то функции $y_2, y_3, \ldots, y_n$ найдутся без дальнейших квадратур (почему?).

Если приведение системы (1) к одному уравнению n-го порядка по указанной выше схеме окажется невозможным, то система (1) всегда может быть приведена к группе уравнений (с одной неизвестной функцией каждое), сумма порядков которых равна n.

Указанная возможность приведения уравнения n-го порядка к нормальной системе n уравнений и обратно используется как при интегрировании, так и при изучении общих свойств решений. В частности, теорему Пикара и другие общие теоремы существования достаточно доказывать только для нормальной системы. Далее, замена уравнений n-го порядка нормальной системой дает возможность изучить не только поведение самой искомой функции, но и поведение ее производных $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, что дает более полное представление о геометрических и аналитических свойствах решений. Эта же замена используется в методах приближенного интегрирования.

Пример 1. Рассмотрим систему (54):

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Дифференцируя первое уравнение и используя второе, получим одно уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \tag{95}$$

Легко убедиться, что его общим решением будет

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \tag{96}$$

Функцию y находим из условия $\frac{dx}{dt} = -y$. Имеем:

$$y = -\frac{dx}{dt} = C_1 \sin t - C_2 \cos t. \tag{97}$$

Таким образом, получаем общее решение системы (54) в виде (55).

Пример 2. Привести уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{98}$$

к соответствующей нормальной системе.

Полагая

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \tag{99}$$

где x_1 — новая неизвестная функция от t, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x_1, \\ &\frac{dx_1}{dt} = f(t, x, x_1). \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

13. Система дифференциальных уравнений высших порядков, разрешенная относительно старших производных:

$$y_k^{(m_k)} = f_k\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\right)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{101}$$

называется *канонической* системой дифференциальных уравнений порядка $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. *Задача Коши* для системы (101) ставится так: найти решение

$$y_k = y_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{102}$$

удовлетворяющее *начальным условиям*:

$$y_k = y_k^{(0)},\ y_k' = y_k'^{(0)}, \ldots, y_k^{(m_k-1)} = y_k^{(m_k-1)(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n). \tag{103}$$

Каноническую систему (101) можно привести к нормальной системе $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ уравнений. Из теоремы Пикара для полученной нормальной системы вытекает соответствующая теорема существования и единственности решения задачи Коши для канонической системы (101). В частности, решение задачи Коши с любыми начальными данными заведомо существует и единственно, если правые части системы (101) суть полиномы от своих аргументов.

Общее решение канонической системы (101) имеет $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ произвольных постоянных. Каноническую систему можно, вообще говоря, привести к одному уравнению порядка $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\frac{d^2x}{dt^2} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{104}$$

Эта система приводится к одному уравнению третьего порядка

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x = 0. \tag{105}$$

Если

$$x = \varphi(t, C_1, C_2, C_3) \tag{106}$$

есть общее решение уравнения (105), то функция y находится без квадратур:

$$y = \varphi_{t^2}''(t, C_1, C_2, C_3). \tag{107}$$

Для системы (104) можно ставить задачу Коши с любыми начальными данными t_0, x_0, x_0', y_0 (почему?). При этом решение всегда существует и единственно. Например, единственным решением, удовлетворяющим начальным условиям

$$x = 1,\ x' = -1,\ y = 1 \text{ при } t = 0, \tag{108}$$

будет

$$x = e^{-t},\ y = e^{-t}. \tag{109}$$

Пример 2. Пусть материальная точка массы m движется в пространстве (x, y, z) под действием силы $\overline{F}$ с составляющими F_x, F_y и F_z. Тогда ее движение подчиняется следующей системе дифференциальных уравнений:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \tag{110}$$

или (предполагая, что сила $\overline{F}$ не зависит явно от времени t)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f_1(x, y, z),\quad \frac{d^2y}{dt^2} = f_2(x, y, z),\quad \frac{d^2z}{dt^2} = f_3(x, y, z). \tag{111}$$

Это каноническая система 6-го порядка.

Положив

$$\frac{dx}{dt} = x_1,\quad \frac{dy}{dt} = y_1,\quad \frac{dz}{dt} = z_1,$$

где x_1, y_1, z_1 — новые неизвестные функции от t, приведем систему (111) к нормальной системе шести уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= x_1, & \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x, y, z),\\
\frac{dy}{dt} &= y_1, & \frac{dy_1}{dt} &= f_2(x, y, z),\\
\frac{dz}{dt} &= z_1, & \frac{dz_1}{dt} &= f_3(x, y, z).
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

§ 2. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

14. Система дифференциальных уравнений, записанная в виде

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \\ = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{1}$$

называется *системой дифференциальных уравнений в симметрической форме*. Здесь все переменные x_1, $x_2, \ldots, x_n$ входят равноправно.

Всякую нормальную систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ \frac{dy_2}{dx}&=f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{dy_n}{dx}&=f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

можно переписать в следующей симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1}=\frac{dy_2}{f_2}=\ldots=\frac{dy_n}{f_n}=\frac{dx}{1}. \tag{3}$$

15. Будем предполагать, что функции X_1, X_2, ..., X_n определены и непрерывны вместе с частными производными в некотором параллелепипеде с центром в заданной точке $\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}\right)$:

$$\left|x_k-x_k^{(0)}\right|\leqslant a\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4}$$

и не обращаются одновременно в нуль в этой точке. Пусть, например,

$$X_n\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}\right)\neq 0. \tag{5}$$

Тогда можно принять x_n за независимую переменную и переписать систему (1) в нормальной форме:

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n},\quad \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n},\ \ldots,\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}. \tag{6}$$

Правые части системы (6) заведомо удовлетворяют в области (4) обоим условиям теоремы Пикара. Поэтому существует единственное решение

$$x_1=\varphi_1(x_n),\ x_2=\varphi_2(x_n),\ \ldots,\ x_{n-1}=\varphi_{n-1}(x_n), \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x_1=x_1^{(0)},\ x_2=x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_{n-1}=x_{n-1}^{(0)}\ \text{при}\ x_n=x_n^{(0)}. \tag{8}$$

Система (6) имеет ровно $n-1$ независимых интегралов

$$\psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\\ \psi_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \tag{9}$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности точки $\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}\right)$ (почему?). Следовательно, система (6) имеет $n-1$ независимых первых интегралов

$$\psi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=C_1,\ \psi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\\ =C_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=C_{n-1}. \tag{10}$$

Интегральные кривые, интегралы и первые интегралы системы (6) будем называть соответственно *интегральными кривыми*, *интегралами и первыми интегралами* системы (1).

Дадим непосредственное определение интеграла системы в симметрической форме. Пусть ψ есть интеграл системы (1) в указанном выше смысле. Тогда для ψ имеет место тождество

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{X_1}{X_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{X_2}{X_n}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\frac{X_{n-1}}{X_n}+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\equiv 0 \qquad (11)$$

(почему?). Умножим обе части на X_n:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}X_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}X_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}X_n\equiv 0. \qquad (12)$$

Рассмотрим теперь полный дифференциал функции ψ:

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n. \qquad (13)$$

Если заменить в нем дифференциалы $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ функциями $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то он вследствие (12) обратится тождественно в нуль.

Определение. Функция $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная и непрерывно дифференцируемая относительно всех своих аргументов в некоторой области D изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем такая, что ее частные производные не обращаются одновременно в нуль, называется *интегралом* системы (1), если ее полный дифференциал (13) тождественно равен нулю в силу системы (1), т. е.

$$d\psi|_{(1)}=\frac{\partial\psi}{\partial x_1}X_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}X_2+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}X_n\equiv 0. \qquad (14)$$

Из этого определения следует, что имеет место следующий *аналитический критерий интеграла системы* (1). Всякий интеграл системы (1) в симметрической форме является решением уравнения с частными производными первого порядка

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \qquad (15)$$

Совокупность $n-1$ независимых первых интегралов (10), т. е. общий интеграл системы (6), будем называть *общим интегралом* системы (1).

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \quad (x\neq 0). \qquad (16)$$

Эта система равносильна нормальной системе

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}. \qquad (17)$$

Интегрируя ее, находим:

$$\frac{y}{x}=C_1, \quad \frac{z}{x}=C_2. \tag{18}$$

Функции

$$\psi_1=\frac{y}{x}, \quad \psi_2=\frac{z}{x} \tag{19}$$

являются интегралами системы (17), а следовательно, и данной системы (16). Совокупность первых интегралов (18) дает общий интеграл системы (16).

Уравнение (15) принимает для системы (16) вид

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{20}$$

Каждый из интегралов (19) является решением уравнения (20). Действительно, полагая в (20), например,

$$u=\psi_1=\frac{y}{x}, \tag{21}$$

получим тождество

$$x\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\left(\frac{1}{x}\right)+z\cdot 0\equiv 0. \tag{22}$$

Напоминаем, что все сказанное выше относительно системы в симметрической форме относится только к областям, не содержащим точек, в которых функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$ одновременно обращаются в нуль.

Точка $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, в которой все функции $X_1, X_2, \ldots, X_n$ обращаются одновременно в нуль, называется *особой точкой* системы (1). Правые части системы (6) обращаются в этой точке в неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Поведение решений системы (1) в окрестности особых точек требует специального изучения (см. гл. V, § 4).

Первые интегралы и общий интеграл системы в симметрической форме во многих случаях могут быть найдены непосредственно [без перехода к нормальной системе (6)]. Более того, переход от нормальной системы к соответствующей ей системе в симметрической форме во многих случаях облегчает задачу нахождения первых интегралов нормальной системы (см. ниже п. **19**, пример 1).

16. Пусть дана автономная система

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
\frac{dx_2}{dt}&=X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dx_n}{dt}&=X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Перепишем эту систему в равносильной ей симметрической форме:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dt}{1}. \tag{24}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}. \tag{25}$$

Всякая интегральная кривая этой системы является траекторией некоторого семейства движений, определяемых данной системой (23).

Действительно, возьмем любую точку $\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}\right)$, в которой знаменатели $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ не обращаются одновременно в нуль. Пусть, например, выполнено условие (5). Тогда существует единственная интегральная кривая (7):

$$x_1=\varphi_1(x_n),\quad x_2=\varphi_2(x_n),\ \ldots,\ x_{n-1}=\varphi_{n-1}(x_n),$$

проходящая через эту точку. Найдем все движения, определяемые системой (23), для которых (7) будет траекторией. Для этого подставим (7) в последнее из уравнений системы (23). Получим:

$$\frac{dx_n}{dt}=X_n\left[\varphi_1(x_n),\ \varphi_2(x_n),\ \ldots,\ \varphi_{n-1}(x_n),\ x_n\right].$$

Интегрируя, имеем:

$$\int\frac{dx_n}{X_n}=t+C. \tag{26}$$

Найдя отсюда x_n:

$$x_n=\varphi_n(t+C) \tag{27}$$

и подставив последнее в (7), получим вместе с (27) искомые движения

$$\begin{gathered}x_1=\varphi_1\left[\varphi_n(t+C)\right];\\ x_2=\varphi_2\left[\varphi_n(t+C)\right],\ \ldots,\ x_n=\varphi_n(t+C).\end{gathered} \tag{28}$$

Если в точке $\left(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n^{(0)}\right)$ все знаменатели системы (25) равны одновременно нулю, то она будет траекторией для состояния равновесия

$$x_1=x_1^{(0)},\ x_2=x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n=x_n^{(0)}, \tag{29}$$

определяемого в этом случае системой (23).

Нетрудно видеть, что, обратно, траекторией любого движения

$$x_1=x_1(t),\quad x_2=x_2(t),\ \ldots,\ x_n=x_n(t), \tag{30}$$

определяемого системой (23), отличного от состояния равновесия, является некоторая интегральная кривая системы (25), причем, как уже отмечалось в п. **2**, уравнения движения (30) являются параметрическими уравнениями соответствующей ему траектории.

Вследствие указанной тесной связи между системами (23) и (25) последняя называется *системой в симметрической форме, соответствующей автономной системе* (23).

Автономной системе второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

соответствует в указанном выше смысле одно уравнение

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}. \tag{32}$$

Автономная система n-го порядка (23) имеет (при сделанных предположениях) ровно $n-1$ независимых интегралов, не содержащих явно время t (почему?).

Пример 1. Система

$$\frac{dx}{dt} = -y; \quad \frac{dy}{dt} = x \tag{33}$$

имеет только один интеграл, не содержащий явно время t. Таким интегралом, как показано в п. **10**, является

$$\psi = x^2 + y^2. \tag{34}$$

Для всякой системы (25) в симметрической форме можно построить соответствующую ей автономную систему, положив в (25) общую величину отношений равной $a\,dt$. Это равносильно тому, что на данных траекториях мы задаем движения. Направление движений определяется правыми частями полученной автономной системы и зависит от знака a.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{x} = \frac{dx}{-y}. \tag{35}$$

Если положить

$$\frac{dy}{x} = \frac{dx}{-y} = dt, \tag{36}$$

то получим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \tag{37}$$

Если вместо dt взять $-dt$:

$$\frac{dy}{x}=\frac{dx}{-y}=-dt, \tag{38}$$

то

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x. \tag{39}$$

Траектории, определяемые системами (37) и (39), одни и те же, а направления движений на них взаимно противоположны.

§ 3. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

17. Простейшей системой дифференциальных уравнений является система вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1), \\ &\frac{dy_2}{dx}=f_2(x, y_2), \\ &\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_n}{dx}=f_n(x, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эта система интегрируется непосредственно: каждое уравнение интегрируется в отдельности.

Если система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}=f_1(x, y_1), \\ &\frac{dy_2}{dx}=f_2(x, y_1, y_2), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{dy_n}{dx}=f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(или состоит из нескольких групп таких уравнений), то интегрирование ее выполняется последовательно, начиная с первого уравнения, в которое входит только одна неизвестная функция y_1. Подставив найденное значение y_1 во второе уравнение, получим уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию y_2 и т. д.

18. Метод интегрирования нормальной системы n дифференциальных уравнений, основанный на приведении ее к одному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией или к нескольким таким уравнениям, причем сумма порядков их равна n (см. п. **12**), называется *методом исключения*.

Практическое использование этого метода связано с возможными затруднениями в интегрировании полученного уравнения n-го порядка (или нескольких уравнений), которые не всегда удается преодолеть. Тем не менее во многих случаях метод исключения дает возможность найти общее решение данной системы. Метод исключения применяется также и для интегрирования канонических систем дифференциальных уравнений.

19. Всякое легко интегрируемое дифференциальное уравнение, полученное комбинацией уравнений данной системы, называется ***интегрируемой комбинацией***. Каждая интегрируемая комбинация доставляет один первый интеграл.

Строя различные интегрируемые комбинации, мы будем получать все новые и новые первые интегралы. Однако при этом нужно принимать во внимание только те из них, которые являются независимыми с ранее найденными. Для нахождения новых интегралов полезно также использовать понижение порядка.

Для построения интегрируемых комбинаций иногда бывает полезно записать данную систему в симметрической форме и воспользоваться свойствами ряда равных отношений.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{y^2}{2x(x^2-y^2-1)}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1-x^2}{-2y(x^2-y^2-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Запишем ее в симметрической форме

$$\frac{dx}{\dfrac{y^2}{2x(x^2-y^2-1)}} = \frac{dy}{\dfrac{1-x^2}{-2y(x^2-y^2-1)}} = \frac{dt}{1}, \tag{4}$$

или (умножая все знаменатели на x^2-y^2-1)

$$\frac{dx}{\dfrac{y^2}{2x}} = \frac{dy}{\dfrac{1-x^2}{-2y}} = \frac{dt}{x^2-y^2-1}. \tag{5}$$

Один из первых интегралов этой системы находится легко. Достаточно проинтегрировать уравнение

$$\frac{dx}{\dfrac{y^2}{2x}} = \frac{dy}{\dfrac{1-x^2}{-2y}}, \tag{6}$$

что дает

$$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} = C_1. \tag{7}$$

Найдем другой первый интеграл, который, кстати, обязательно должен зависеть явно от t (почему?).

С этой целью воспользуемся свойством ряда равных отношений. Умножим в системе (5) числители и знаменатели первых двух дробей соответственно на $2x$ и $-2y$:

$$\frac{2xdx}{y^2}=\frac{-2ydy}{1-x^2}=\frac{dt}{x^2-y^2-1}. \tag{8}$$

Замечая, что сумма знаменателей равна нулю, складываем числители:

$$\frac{2xdx}{y^2}=\frac{-2ydy}{1-x^2}=\frac{2xdx-2ydy+dt}{0}, \tag{9}$$

откуда

$$2xdx-2ydy+dt=0, \quad \text{или} \quad d(x^2-y^2+t)=0 \tag{10}$$

и, следовательно,

$$x^2-y^2+t=C_2. \tag{11}$$

Совокупность первых интегралов (7) и (11) представляет собой общий интеграл системы (3).

Пример 2. Система

$$\frac{dx}{dt}=-y, \quad \frac{dy}{dt}=x, \quad \frac{dz}{dt}=0 \tag{12}$$

имеет два первых интеграла, не содержащих явно время t:

$$x^2+y^2=C_1, \quad z=C_2. \tag{13}$$

Разрешая первый из них относительно y и подставляя найденное значение y в первое из уравнений данной системы (12), имеем (ограничиваясь положительным значением радикала):

$$\frac{dx}{dt}=-\sqrt{C_1-x^2}, \tag{14}$$

откуда

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}}=-t+C_3. \tag{15}$$

Заменяя здесь C_1 его значением из первого интеграла $x^2+y^2=C_1$, найдем недостающий первый интеграл системы (12) в виде

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+t=C_3. \tag{16}$$

Пример 3. Найти общий интеграл следующей системы в симметрической форме:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{0}. \tag{17}$$

Эта система имеет два независимых первых интеграла:

$$xy=C_1, \quad z=C_2, \tag{18}$$

которые и образуют ее общий интеграл. Левые части равенств (18) являются независимыми интегралами системы (17).

Пример 4. Пусть дана система

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}. \tag{19}$$

Одним из первых интегралов будет

$$z = C_1. \tag{20}$$

Подставляя в уравнение

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{y} \tag{21}$$

вместо переменной z ее значение из первого интеграла (20), имеем:

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{y}, \tag{22}$$

откуда

$$y = C_2 e^{\frac{x}{C_1}}; \quad ye^{-\frac{x}{C_1}} = C_2. \tag{23}$$

Заменяя C_1 ее значением из первого интеграла (20), получим:

$$ye^{-\frac{x}{z}} = C_2. \tag{24}$$

Это и есть недостающий первый интеграл системы (19).

§ 4. ЗАДАЧИ

Матвеев. Сборник задач, №№ **892, 894, 896, 898, 899, 902—906, 910, 912.**

ГЛАВА V

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ТЕОРЕМА ПИКАРА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1. Условие Липшица. **2.** Теорема Пикара для одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. **3.** Теорема Пикара для нормальной системы n-го порядка. **4.** Теорема Пикара для линейной системы. **5.** Теорема Пикара для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. **6.** Теорема Пикара для линейного уравнения n-го порядка.

§ 2. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ (ДВИЖЕНИЯ)

7. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров. **8.** Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных. **9.** Понятие об устойчивости решения (движения). **10.** Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши по начальным данным.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

11. Теорема существования общего решения одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Доказательство существования интеграла. **12.** Теорема существования общего решения нормальной системы n-го порядка. Доказательство существования n независимых интегралов нормальной системы n-го порядка.

§ 4. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

13. Особые точки уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. **14.** Особые точки нормаль-

ной системы n-го порядка. Точки равновесия. **15.** Поведение интегральных кривых уравнения с дробно-линейной однородной правой частью в окрестности особой точки. **16.** Понятие о проблеме центра и фокуса.

§ 5. ТЕОРЕМА КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

17. Понятие о голоморфной функции и голоморфном решении задачи Коши. Понятие о мажоранте. **18.** Теорема Коши для одного уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. **19.** Теорема Коши для нормальной системы n-го порядка. **20.** Теорема Коши для линейной системы. **21.** Теорема Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной. **22.** Теорема Коши для линейного уравнения n-го порядка. **23.** Примеры существования голоморфных решений в случае невыполнения условия теоремы Коши.

§ 6. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования, гл. V, пп. **118—134, 136—151.**

Степанов, гл. II, § 1 (до п. 5); § 2 (до стр. 84); гл. IV, § 1; гл. VII, § 1, п. **3**; § 2 (до стр. 275), § 3, § 6 (до п. **2**).

Эльсгольц, гл. I, § 6 (теоремы II и III, включая примеры 1 и 2 на стр. 44, стр. 49—56); гл. II, § 1; гл. IV, §§ 1, 2.

Дополнительная

Р. Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1954, гл. I—IV.

Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1958, гл. I—II.

С. Лефшец. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1961, гл. I—II.

Матвеев. Методы интегрирования, гл. V, п. **153—155.**

В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1949, гл. I.

Петровский, гл. V, §§ 10—25; гл. IV, §§ 28—32.

Понтрягин, гл. IV, §§ 20—23 (до стр. 195).

Степанов, гл. II, § 1 (стр. 68—75), § 2 (стр. 84—94).

Г. П. Толстов. Курс математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1957, стр. 171—185, 482—491.

Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. М., ИЛ, 1962, гл. I, §§ 1—4, 7—9.
Эльсгольц, гл. I, § 6, стр. 28—35, 44—49.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. ТЕОРЕМА ПИКАРА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

1. Одним из условий, входящих в формулировку теоремы Пикара, является так называемое условие Липшица. Выясним его смысл.

Говорят, что функция $y=f(x)$ удовлетворяет *условию Липшица* в интервале $[a, b]$,* если существует такое постоянное положительное число L, что для любых значений $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, принадлежащих интервалу $[a, b]$, выполняется неравенство

$$|f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})|\leqslant L\,|\bar{\bar{x}}-\bar{x}|. \tag{1}$$

Наименьшее из чисел L, входящих в условие Липшица, будем называть *константой Липшица*.

Условие Липшица представляет собой оценку приращения функции через приращение независимой переменной.

С изменением интервала $[a, b]$ константа Липшица L, вообще говоря, изменяется.

Пример 1. Функция

$$y=kx \tag{2}$$

удовлетворяет условию Липшица в интервале $(-\infty, +\infty)$ и, следовательно, в любом конечном интервале, причем $L=|k|$.

Действительно, для любых $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ имеем:

$$|f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})|=|k\bar{\bar{x}}-k\bar{x}|=|k|\,|\bar{\bar{x}}-\bar{x}|. \tag{3}$$

Сравнивая (3) и (1), видим, что $L=|k|$.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$y=x^2. \tag{4}$$

Имеем:

$$|f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})|=|\bar{\bar{x}}^2-\bar{x}^2|=|\bar{\bar{x}}+\bar{x}|\,|\bar{\bar{x}}-\bar{x}|,$$

откуда видно, что функция (4) не удовлетворяет условию Липшица в интервале $(-\infty, +\infty)$. Если же взять конечный интервал $[-a, +a]$, то $|\bar{\bar{x}}+\bar{x}|\leqslant 2a$, и условие Липшица будет выполнено, причем $L=2a$, так что с увеличением длины интервала постоянная Липшица тоже увеличивается.

Если функция $y=f(x)$ удовлетворяет условию Липшица в интервале $[a, b]$, то она заведомо непрерывна в этом интервале (почему?). Обратное утверждение несправедливо.

* Или в интервале любого другого вида.

Пример 3. Функция

$$y=\sqrt{x} \tag{5}$$

непрерывна в любом интервале вида $[0, a]$. Однако условию Липшица ни в каком интервале такого вида она не удовлетворяет, что видно из равенства

$$\sqrt{\bar{\bar{x}}}-\sqrt{\bar{x}}=\frac{\bar{\bar{x}}-\bar{x}}{\sqrt{\bar{\bar{x}}}+\sqrt{\bar{x}}}. \tag{6}$$

Если функция $y=f(x)$ не только непрерывна в интервале $[a, b]$, но и имеет ограниченную производную, т. е.

$$\left|\frac{df}{dx}\right| \leqslant K, \tag{7}$$

где K — постоянное положительное число, то она заведомо удовлетворяет условию Липшица в интервале $[a, b]$, причем $L=K$.

В самом деле, пользуясь формулой конечных приращений (формулой *Лагранжа*) для любых $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ из $[a, b]$, имеем:

$$f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})=f'(c)(\bar{\bar{x}}-\bar{x}) \quad (\bar{x}<c<\bar{\bar{x}}), \tag{8}$$

откуда вследствие (7) вытекает условие Липшица ($L=K$).

Если функция $y=f(x)$ непрерывна в интервале $[a, b]$, а ее производная существует, но не ограничена, то условие Липшица в этом интервале не выполняется.

Пример 4. Вернемся к функциям $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$, рассмотренным в примерах 2 и 3.

Для первой из них производная $f'(x)=2x$ ограничена в интервале $[-a, a]$, $K=2a$, и мы снова получаем, что в каждом таком интервале условие Липшица выполнено.

Для функции $y=\sqrt{x}$ производная $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ не ограничена в интервале вида $[0, a]$. Поэтому условие Липшица в таком интервале не выполняется.

Условие Липшица может выполняться и в том случае, когда функция, будучи непрерывной, не имеет производной.

Пример 5. Функция

$$y=|x|$$

не имеет производной в точке $x=0$, но удовлетворяет условию Липшица в интервале $(-\infty, +\infty)$, ибо

$$|f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})|=|\,|\bar{\bar{x}}|-|\bar{x}|\,| \leqslant |\bar{\bar{x}}-\bar{x}|, \quad L=1.$$

Рассмотрим условие Липшица для функции нескольких переменных. Говорят, что функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет *условию Липшица* в параллелепипеде*

$$|x_k-x_k^{(0)}| \leqslant a_k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

* Или в области более общего вида

$$x_k^{(0)}-a_k^{(1)} \leqslant x_k \leqslant x_k^{(0)}+a_k^{(2)} \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

а также в неограниченной области изменения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

если существует такое постоянное положительное число L, что для любых двух точек $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и $(x_1, x_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)$, принадлежащих (9), выполняется неравенство

$$|f(x_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)-f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} |x_k - \bar{x}_k|. \qquad (10)$$

Условие Липшица заведомо выполнено, если частные производные от функции f по всем аргументам существуют и ограничены

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \leqslant K \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (11)$$

При этом $L=K$ (почему?).

Отсюда, в частности, следует, что полином всегда удовлетворяет условию Липшица в любом параллелепипеде (9).

В общем случае теоремы Пикара относительно функций, входящих в уравнения, требуют, чтобы они удовлетворяли условию Липшица относительно всех аргументов, кроме одного.

Говорят, что функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданная в параллелепипеде (9), удовлетворяет условию Липшица относительно аргументов $x_2, \ldots, x_n$, если существует такое положительное число L, что имеет место неравенство

$$|f(x_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)-f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)| \leqslant L \sum_{k=2}^{n} |\bar{\bar{x}}_k - \bar{x}_k|, \qquad (12)$$

где $(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ и $(x_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)$ — любые точки из (9).

Это условие Липшица будет заведомо выполнено, если функция f непрерывна в (9), а $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(k=2, \ldots, n)$ существуют и ограничены

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| \leqslant K \quad (k=2, \ldots, n). \qquad (13)$$

При этом $L=K$.

Пример 6. Функция

$$z=\sqrt{x}y^2 \qquad (14)$$

удовлетворяет в области

$$0 \leqslant x \leqslant a; \quad -b \leqslant y \leqslant b \qquad (15)$$

условию Липшица относительно y, причем $L=2\sqrt{a}\,b$.

Пример 7. Функция

$$u=p_1(x)\,y_1+p_2(x)\,y_2+\ldots+p_n(x)\,y_n, \qquad (16)$$

линейная относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с коэффициентами $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots, p_n(x)$, непрерывными в интервале $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в области

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad |y_k| < +\infty, \quad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (17)$$

ибо

$$\frac{\partial u}{\partial y_k} = p_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

но

$$|p_k(x)| \leqslant K \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{19}$$

так что

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y_k}\right| \leqslant K \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

а тогда условие Липшица выполнено, причем $L = K$.

2. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{21}$$

и поставлены начальные условия:

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{22}$$

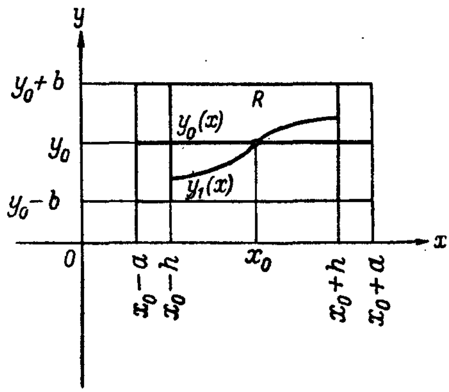

Рис. 38.

Теорема Пикара. *Если $f(x, y)$ определена в прямоугольнике R:*

$$|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b \tag{23}$$

с центром в начальной точке (x_0, y_0) (рис. 38) *и удовлетворяет в этом прямоугольнике двум условиям;*

1) $f(x, y)$ *непрерывна* и, следовательно, ограничена в* R:

$$|f(x, y)| \leqslant M, \tag{24}$$

где M — постоянное положительное число;

2) $f(x, y)$ *удовлетворяет условию Липшица относительно* y:

$$\left|f(x, \bar{\bar{y}}) - f(x, \bar{y})\right| \leqslant L\left|\bar{\bar{y}} - \bar{y}\right|, \tag{25}$$

где L — постоянное положительное число, а $(x, \bar{y})$, $(x, \bar{\bar{y}})$ — *любые точки из прямоугольника R, то уравнение* (21) *имеет единственное решение*

$$y = y(x), \tag{26}$$

удовлетворяющее начальным условиям (22), *заведомо определенное (и непрерывно дифференцируемое) в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{27}$$

* Здесь и в дальнейшем, говоря о непрерывности функции нескольких независимых переменных, мы всегда будем иметь в виду непрерывность по совокупности независимых переменных.

где
$$h = \min\left(a, \ \frac{b}{M}\right). \tag{28}$$

Это решение не выходит из прямоугольника R при $|x - x_0| \leqslant h$, т. е.
$$|y(x) - y_0| \leqslant b \quad \text{при} \quad |x - x_0| \leqslant h. \tag{29}$$

Доказав эту теорему, мы тем самым докажем теорему Пикара в упрощенной формулировке, приведенную в гл. I, где условие Липшица заменено более грубым требованием существования и ограниченности частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Основная идея приводимого ниже доказательства теоремы Пикара состоит в том, что задача Коши (21)—(22) сводится к некоторому интегральному уравнению, которое решается методом последовательных приближений (методом Пикара), после чего доказывается, что найденное решение единственно.*

Разобьем доказательство на пять частей.

1) Приведем задачу Коши (21)—(22) к интегральному уравнению. Предположим, что найдено искомое решение (26). Подставив его в уравнение (21), получим тождество:
$$\frac{dy(x)}{dx} \equiv f[x, \ y(x)] \quad (|x - x_0| \leqslant h). \tag{30}$$

Проинтегрируем обе части в пределах от x_0 до x. Тогда, принимая во внимание начальные условия (22), будем иметь:
$$y(x) - y_0 \equiv \int_{x_0}^{x} f[x, \ y(x)]\, dx \quad (|x - x_0| \leqslant h), \tag{31}$$
или
$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, \ y(x)]\, dx \quad (|x - x_0| \leqslant h). \tag{32}$$

Рассмотрим *интегральное* уравнение
$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \ y)\, dx. \tag{33}$$

(Здесь неизвестная функция y входит под знак интеграла.) *Решением* уравнения (33) называется функция $y = y(x)$, обращающая это уравнение в тождество в некотором интервале изменения x.

Сравнивая (33) и (32), видим, что искомое решение (26) является решением интегрального уравнения (33).

---

* Единственность может быть доказана и до доказательства существования (см., например, Эльсгольц, гл. I, теорема II).

Покажем, что, обратно, всякое решение $y=y(x)$ интегрального уравнения (33), определенное и непрерывное в интервале (27) и не выходящее из области R, является решением задачи Коши (21)—(22).

Прежде всего заметим, что начальные условия (22) выполняются автоматически. Проверим, что и уравнение (21) удовлетворяется.

В самом деле, мы имеем тождество (32). Подынтегральная функция $f[x, y(x)]$ есть функция от x, непрерывная в интервале $|x-x_0| \leqslant h$. Это следует из теоремы о непрерывности сложной функции, ибо $f(x, y)$ непрерывна в R, а $y=y(x)$ непрерывна в $|x-x_0| \leqslant h$ и не выходит из R при $|x-x_0| \leqslant h$. Поэтому интеграл в (32) можно дифференцировать по переменному верхнему пределу. Дифференцируя (32) по x, получим (30), т. е. $y=y(x)$ есть решение уравнения (21).

Вследствие равносильности задачи Коши (21) — (22) и интегрального уравнения (33), достаточно найти решение последнего, обладающего указанными выше свойствами.

2) Будем искать решение интегрального уравнения (33) *методом последовательных приближений*. Этот метод состоит в том, что строится некоторая бесконечная рекуррентная последовательность функций, сходящаяся к искомому решению. Каждая из функций этой последовательности называется *приближением* к искомому решению.

Примем за *исходное (нулевое) приближение* $y_0(x)$ — функцию, тождественно равную начальному значению искомого решения:

$$y_0(x) \equiv y_0. \tag{34}$$

Геометрически это означает что вместо истинного решения $y=y(x)$ берется прямая $y=y_0$, параллельная оси Ox, проходящая через начальную точку (рис. 38). Подставив нулевое приближение в правую часть интегрального уравнения (33), получим функцию $y_1(x)$. Примем эту функцию за *первое приближение*

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx \tag{35}$$

(рис. 38). За *второе приближение* возьмем

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx \tag{36}$$

и т. д.; n-ое *приближение* $y_n(x)$ определим равенством:

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx. \tag{37}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, получим бесконечную последовательность функций:

$$y_0,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots \tag{38}$$

Докажем, что *все функции последовательности* (38) *определены в интервале* $|x-x_0|\leqslant h$, *непрерывны в нем и не выходят из области* R *при* $|x-x_0|\leqslant h$, *т. е.*

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant b \text{ при } |x-x_0|\leqslant h. \tag{39}$$

Убедимся в этом сначала для $y_1(x)$. Из (35) следует, что $y_1(x)$ определена и непрерывна в интервале $|x-x_0|\leqslant a$ (почему?) и тем самым в интервале $|x-x_0|\leqslant h$. Остается проверить, что $y_1(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant b \text{ при } |x-x_0|\leqslant h. \tag{40}$$

Из (35) имеем:

$$y_1(x)-y_0=\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_0)\,dx. \tag{41}$$

Поэтому

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\ y_0)|\,dx\right|. \tag{42}$$

(Здесь мы воспользовались известной из курса анализа оценкой абсолютной величины определенного интеграла через абсолютную величину подынтегральной функции

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|, \tag{43}$$

где a может быть меньше, больше или равно b.) Так как

$$|f(x,\ y_0)|\leqslant M, \tag{44}$$

то, продолжая оценку (42), имеем:

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant M\left|\int_{x_0}^{x} dx\right|=M|x-x_0|, \tag{45}$$

или

$$|y_1(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|. \tag{46}$$

Для выполнения неравенства $|y_1(x)-y_0|\leqslant b$ нужно потребовать, чтобы $M|x-x_0|\leqslant b$, так что должны одновременно выполняться неравенства

$$|x-x_0|\leqslant\frac{b}{M} \text{ и } |x-x_0|\leqslant a. \tag{47}$$

Поэтому, если ограничить область изменения x интервалом $|x-x_0|\leqslant h$, где $h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, то оба неравенства (47) будут выполнены, и, следовательно, $y_1(x)$ будет удовлетворять неравенству (40) (рис. 38).

Пусть теперь доказываемое утверждение справедливо для $y_{n-1}(x)$. Покажем, что оно тогда будет справедливо и для $y_n(x)$. Действительно, из (37) следует, что $y_n(x)$ определена и непрерывна в интервале $|x-x_0|\leqslant h$ (почему?). Оценивая $y_n(x)-y_0$, имеем:

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x, y_{n-1})|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant M|x-x_0|\leqslant Mh\leqslant b \text{ при } |x-x_0|\leqslant h, \tag{48}$$

или

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant b \text{ при } |x-x_0|\leqslant h,$$

т. е. $y_n(x)$ не выходит из области R при $|x-x_0|\leqslant h$.

Так как для $n=1$ доказываемое утверждение справедливо, то из только что доказанного следует, что оно справедливо для всех n.

3) Докажем, что *последовательность функций* (38) *равномерно сходится в интервале* $|x-x_0|\leqslant h$ *и что, следовательно, предельная функция непрерывна в этом интервале.*

Заметим, что сходимость последовательности (38) равносильна сходимости следующего ряда:

$$y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+\ldots, \tag{49}$$

ибо частичная сумма этого ряда

$$s_n=y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1}) \tag{50}$$

равна y_n, т. е. общему члену последовательности (38).

Поэтому достаточно доказать равномерную сходимость ряда (49) в интервале $|x-x_0|\leqslant h$.

С этой целью построим мажорантный ряд для ряда (49). Для этого оценим сначала члены самого ряда (49).

Для второго члена этого ряда имеем оценку (46). Оценим третий член. Из (35) и (36) находим:

$$y_2-y_1=\int_{x_0}^{x_1}[f(x, y_1)-f(x, y_0)]\,dx. \tag{51}$$

Поэтому

$$|y_2-y_1|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x_1}|f(x, y_1)-f(x, y_0)|\,dx\right|. \tag{52}$$

Оценим разность $f(x, y_1)-f(x, y_0)$, пользуясь условием Липшица, на что имеем право, ибо точки (x, y_0) и (x, y_1) принадлежат области R (ведь мы доказали, что функция $y_1(x)$ не выходит из области R). Получим:

$$|f(x, y_1)-f(x, y_0)| \leqslant L\,|y_1-y_0|. \tag{53}$$

Подставляя (53) в (52), имеем:

$$|y_2-y_1| \leqslant L\left|\int_{x_0}^{x_1}|y_1-y_0|\,dx\right|. \tag{54}$$

Воспользуемся оценкой (46). Получим:

$$|y_2-y_1| \leqslant ML\left|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|\,dx\right| = ML\,\frac{|x-x_0|^2}{2!}, \tag{55}$$

или

$$|y_2-y_1| \leqslant ML\,\frac{|x-x_0|^2}{2!}. \tag{56}$$

Аналогично для четвертого члена ряда (49) получим оценку

$$|y_3-y_2| \leqslant ML^2\,\frac{|x-x_0|^3}{3!}. \tag{57}$$

Продолжая этот процесс, получим следующую оценку для общего члена ряда (49):

$$|y_n-y_{n-1}| \leqslant ML^{n-1}\,\frac{|x-x_0|^n}{n!}, \tag{58}$$

в справедливости которой легко убедиться методом математической индукции.

Из оценки (58) следует, что для интересующих нас значений x, $|x-x_0| \leqslant h$, мы имеем следующую оценку для общего члена ряда (49):

$$|y_n-y_{n-1}| \leqslant ML^{n-1}\,\frac{h^n}{n!} \quad \text{при } |x-x_0| \leqslant h. \tag{59}$$

Построим ряд

$$|y_0|+Mh+ML\,\frac{h^2}{2!}+\ldots+ML^{n-1}\,\frac{h^n}{n!}+\ldots \tag{60}$$

Этот ряд сходится, в чем легко убедиться по признаку Даламбера. В силу оценки (59) ряд (60) является **мажорантным** для ряда (49). Поэтому, согласно признаку **Вейерштрасса**, ряд (49) сходится в интервале $|x-x_0| \leqslant h$ **равномерно**.

Обозначим сумму ряда (49) или, что то же, предельную функцию последовательности (38) через $y(x)$, так что

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \quad \text{при } |x-x_0| \leqslant h. \tag{61}$$

Так как члены ряда (49) непрерывны в интервале $|x - x_0| \leqslant h$ и ряд (49) сходится в этом интервале равномерно к сумме $y(x)$, то, согласно известной теореме о непрерывности суммы ряда, функция $y(x)$ будет непрерывна в интервале $|x - x_0| \leqslant h$.

4) Докажем, что *предельная функция* $y = y(x)$ *не выходит из области* R *при* $|x - x_0| \leqslant h$ *и удовлетворяет интегральному уравнению* (33) *и, следовательно, является решением задачи Коши* (21)—(22).

В самом деле, переходя в неравенстве (39) к пределу при $n \to \infty$, получим неравенство (29),

$$|y(x) - y_0| \leqslant b \text{ при } |x - x_0| \leqslant h.$$

Покажем теперь, что $y = y(x)$ есть решение интегрального уравнения (33). Для этого заметим сначала, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{62}$$

Действительно, так как $y_n(x)$ сходится к $y(x)$ равномерно в интервале $|x - x_0| \leqslant h$, то по любому $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N_ε, что

$$|y_n(x) - y(x)| < \varepsilon \text{ при } n > N_\varepsilon \tag{63}$$

одновременно для всех x из интервала $|x - x_0| \leqslant h$. Поэтому имеем:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_n) - f(x, y)|\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x} |y_n - y|\,dx\right| \leqslant L\varepsilon\,|x - x_0| \leqslant L\varepsilon h \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{64}$$

откуда и следует (62).

Переходя теперь к пределу в (37) при $n \to \infty$, получим тождество (32), т. е. функция $y = y(x)$ является решением интегрального уравнения (33) и, следовательно, решением задачи Коши (21)—(22).

5) Докажем, что *найденное решение единственно*. Пусть существует другое решение $y = y^*(x)$ задачи Коши (21)—(22), определенное и непрерывное в некотором интервале $|x - x_0| \leqslant h'$, где $0 < h' \leqslant h$, и не выходящее при этих значениях x из области R. Это решение тоже удовлетворяет интегральному уравнению (33), так что имеем тождество:

$$y^*(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f[x, y^*(x)]\,dx \quad (|x - x_0| \leqslant h'). \tag{65}$$

Оценим разность между n-ым приближением к решению $y=y(x)$ и решением $y=y^*(x)$. Имеем:

$$|y_n-y^*|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\ y_{n-1})-f(x,\ y^*)|\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_{n-1}-y^*|\,dx\right|, \tag{66}$$

или

$$|y_n-y^*|\leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}|y_{n-1}-y^*|\,dx\right| \quad (|x-x_0|\leqslant h'). \tag{67}$$

Пользуясь рекуррентной оценкой (67), можно найти интересующую нас оценку для y_n-y^*. Для этого оценим сначала непосредственно разность y_0-y^*. В силу (65) имеем:

$$|y_0-y^*|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,\ y^*)|\,dx\right|.$$

Но $|f(x,\ y^*)|\leqslant M$. Поэтому

$$|y_0-y^*|\leqslant M|x-x_0|.$$

Полагая теперь в (67) $n=1$, получим оценку для y_1-y^*

$$|y_1-y^*|\leqslant ML\frac{|x-x_0|^2}{2}. \tag{68}$$

Используя эту оценку, найдем из формулы (67) при $n=2$ оценку для y_2-y^*:

$$|y_2-y^*|\leqslant ML^2\frac{|x-x_0|^3}{3!}. \tag{69}$$

Продолжая этот процесс, найдем следующую оценку для y_n-y^*:

$$|y_n-y^*|\leqslant ML^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \text{ при } |x-x_0|\leqslant h', \tag{70}$$

которая легко доказывается методом математической индукции.

Из оценки (70) следует, что

$$|y_n-y^*|\leqslant ML^n\frac{h'^{n+1}}{(n+1)!} \text{ при } |x-x_0|\leqslant h'. \tag{71}$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$, ибо она представляет собой общий член заведомо сходящегося ряда:

$$Mh'+ML\frac{h'^2}{2!}+\ldots+ML^n\frac{h'^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots=$$
$$=\frac{M}{L}\left[Lh'+\frac{(Lh')^2}{2!}+\ldots+\frac{(Lh')^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots\right]=\frac{M}{L}(e^{Lh'}-1). \tag{72}$$

Поэтому
$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y^*(x) \text{ при } |x - x_0| \leqslant h'. \tag{73}$$
Но тогда
$$y^*(x) \equiv y(x) \text{ при } |x - x_0| \leqslant h', \tag{74}$$
ибо переменная y_n не может иметь двух различных пределов.

Таким образом, решение $y = y^*(x)$ совпадает с решением $y = y(x)$ (для $|x - x_0| \leqslant h'$), что и доказывает единственность последнего.

Теорема Пикара полностью доказана.

Каждую из функций $y_n(x)$ можно считать приближенным решением задачи Коши (21)—(22).

Укажем две оценки, связанные с методом Пикара: оценку решения $y(x)$ и оценку погрешности от замены решения n-ым приближением $y_n(x)$.

Решение задачи Коши (21)—(22), доставляемое методом Пикара, является суммой ряда (49):
$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots = y(x).$$
Оценим $y(x)$, используя оценку (58) для членов ряда (49). Получим:
$$|y(x)| \leqslant |y_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n - y_{n-1}| \leqslant |y_0| + M \sum_{n=1}^{\infty} L^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!} =$$
$$= |y_0| + \frac{M}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(L\,|x - x_0|)^n}{n!} = |y_0| + \frac{M}{L}\left(e^{L|x - x_0|} - 1\right), \tag{75}$$
или
$$|y(x)| \leqslant |y_0| + \frac{M}{L}\left(e^{L|x - x_0|} - 1\right). \tag{76}$$

Для нахождения оценки погрешности приближенного решения $y_n(x)$, т. е. оценки разности $y_n(x) - y(x)$, воспользуемся оценкой (71) для $y_n - y^*$, заменяя $y^*(x)$ на $y(x)$ и h' на h.

Получим:
$$|y_n(x) - y(x)| \leqslant ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \text{ при } |x - x_0| \leqslant h. \tag{77}$$

Пример. Найти третье приближение к решению уравнения
$$y' = x^2 + y^2 \ (|x| \leqslant 2,\ |y| \leqslant 2), \tag{78}$$
удовлетворяющему начальным условиям:
$$y = 0 \text{ при } x = 0. \tag{79}$$

Ранее (гл. I, п. 6, пример 2) уже было показано, что решение, удовлетворяющее начальным условиям (79), существует, единственно и заведомо определено в интервале $|x| \leqslant \frac{1}{4}$.

Заменим задачу Коши (78) — (79) равносильным ей интегральным уравнением

$$y = \int_0^x (x^2 + y^2)\,dx. \tag{80}$$

Полагая $y_0(x) \equiv 0$, имеем:

$$y_1(x) = \int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + y_1^2\right) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(x^2 + y_2^2\right) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{3\cdot 63} + \frac{x^{14}}{63^2}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{3\cdot 63\cdot 11} + \frac{x^{15}}{63^2\cdot 15},$$

так что

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{3\cdot 63\cdot 11} + \frac{x^{15}}{63^2\cdot 15}. \tag{81}$$

Оценим погрешность от замены $y(x)$ на $y_3(x)$. Пользуясь формулой (77), имеем $\left(M = 8,\ L = 4,\ h = \frac{1}{4}\right)$

$$|y_3(x) - y(x)| \leqslant 8\cdot 4^3 \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^4}{4!}, \tag{82}$$

или

$$|y_3(x) - y(x)| \leqslant \frac{1}{12}.^* \tag{83}$$

Согласно формуле (76) для решения $y = y(x)$, имеем оценку

$$|y(x)| \leqslant 2\left(e^{4|x|} - 1\right). \tag{84}$$

3. Пусть дана нормальная система

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{85}$$

и поставлены начальные условия

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0. \tag{86}$$

---

* Эта оценка очень грубая. Можно получить более точную оценку (см.: Г. П. Толстов. Курс математического анализа, т. II. М., Гостехиздат, 1957, стр. 487—489).

Теорема Пикара. *Если функции f_k определены в параллелепипеде*

$$R: |x-x_0| \leqslant a, \ |y_k - y_k^{(0)}| \leqslant b \quad (k=1, 2, \ldots, n) \qquad (87)$$

с центром в начальной точке $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)$ *и удовлетворяют в нем двум условиям:*

1) f_k *непрерывны и, следовательно, ограничены*

$$|f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant M \quad (k=1, 2, \ldots, n); \qquad (88)$$

2) f_k *удовлетворяют условию Липшица относительно переменных* $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$|f_k(x, \overline{\overline{y}}_1, \overline{\overline{y}}_2, \ldots, \overline{\overline{y}}_n) - f_k(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)| \leqslant$$

$$\leqslant L \sum_{i=1}^{n} |\overline{\overline{y}}_i - \overline{y}_i| \qquad (89)$$

$$(k=1, 2, \ldots, n),$$

где L — постоянное положительное число, а $(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)$ *и* $(x, \overline{\overline{y}}_1, \overline{\overline{y}}_2, \ldots, \overline{\overline{y}}_n)$ — *любые точки из R, то система* (85) *имеет единственное решение*:

$$y_1 = y_1(x), \ y_2 = y_2(x), \ \ldots, \ y_n = y_n(x), \qquad (90)$$

удовлетворяющее начальным условиям (86), *определенное (и непрерывно дифференцируемое) в интервале*

$$|x - x_0| \leqslant h, \qquad (91)$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right). \qquad (92)$$

Это решение не выходит из параллелепипеда R при $|x-x_0| \leqslant h$, т. е.

$$|y_k(x) - y_k^{(0)}| \leqslant b \quad (k=1, 2, \ldots, n) \text{ при } |x-x_0| \leqslant h. \qquad (93)$$

Из этой теоремы следует упрощенная формулировка теоремы Пикара для нормальной системы, приведенная в гл. IV; ибо если частные производные

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_l} \ (k, \ l=1, 2, \ldots, n)$$

существуют и ограничены в R, то условие Липшица заведомо выполнено.

Доказательство теоремы Пикара для нормальной системы проводится по тому же плану, что и в случае $n=1$.

1) Задача Коши (85) — (86) заменяется равносильной *системой интегральных уравнений*

$$y_k = y_k^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (94)$$

2) Строятся последовательные приближения, причем за нулевое приближение принимаются начальные значения искомых функций

$$y_k^{(0)}(x) \equiv y_k^{(0)} \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{95}$$

а последующие приближения определяются равенствами

$$y_k^{(m)}(x) = y_k^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_k\left(x, y_1^{(m-1)}, y_2^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) dx \tag{96}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n).$$

В результате получаются n последовательностей:

$$y_k^{(0)}, \; y_k^{(1)}(x), \; y_k^{(2)}(x), \; \ldots, \; y_k^{(m)}(x), \; \ldots \tag{97}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n).$$

Доказывается, что все функции, входящие в эти последовательности, определены и непрерывны в $|x-x_0| \leqslant h$ и не выходят из области R при этих значениях x.

3) Доказывается, что последовательности (97) равномерно сходятся в $|x-x_0| \leqslant h$ и что, следовательно, предельные функции $y_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ непрерывны в этом интервале.

Для этого последовательности (97) заменяются соответствующими рядами

$$y_k^{(0)} + \left[y_k^{(1)} - y_k^{(0)}\right] + \left[y_k^{(2)} - y_k^{(1)}\right] + \ldots + \left[y_k^{(m)} - y_k^{(m-1)}\right] + \ldots \tag{98}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n).$$

Оценивая члены этих рядов, находят:

$$\left|y_k^{(1)} - y_k^{(0)}\right| \leqslant M\,|x-x_0| \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{99}$$

Пользуясь этой оценкой и условием Липшица, получают:

$$\left|y_k^{(2)} - y_k^{(1)}\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x}\right| f_k\left(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}\right) -$$
$$- f_k\left(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}\right)\Big|\, dx \Big| \leqslant L\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}\right| y_i^{(1)} - y_i^{(0)}\Big|\, dx \Big| \leqslant$$
$$\leqslant MnL\frac{|x-x_0|^2}{2!} \tag{100}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n).$$

Для общего члена находят оценку

$$\left|y_k^{(m)} - y_k^{(m-1)}\right| \leqslant M(nL)^{m-1}\frac{|x-x_0|^m}{m!} \tag{101}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$|y_k^{(m)} - y_k^{(m-1)}| \leqslant M(nL)^{m-1}\frac{h^m}{m!} \text{ при } |x - x_0| \leqslant h \qquad (102)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, ряды (98), а с ними и последовательности (97), равномерно сходятся в интервале $|x - x_0| \leqslant h$, так что предельные функции $y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны в этом интервале.

4) Доказывается, что предельные функции $y_k = y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ не выходят из области R при $|x - x_0| \leqslant h$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (94) и, следовательно, дают решение задачи Коши (85)—(86).

5) Доказывается, что найденное решение единственно.

Совокупность функций

$$y_1^{(m)}(x),\ y_2^{(m)}(x),\ \ldots,\ y_n^{(m)}(x) \qquad (103)$$

называется *приближенным решением* задачи Коши (85)—(86). При этом погрешность оценивается формулой

$$|y_k^{(m)}(x) - y_k(x)| \leqslant \frac{M(nL)^m h^{m+1}}{(m+1)!} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (104)$$

4. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) y_l + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (105)$$

Если $f_k(x)$ тождественно равны нулю при всех рассматриваемых значениях x, то система (105) принимает вид

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) y_l \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (106)$$

и называется *однородной*. В противном случае она называется *неоднородной*.

Для линейной системы (105) имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема Пикара. *Если коэффициенты $p_{kl}(x)$ и функции $f_k(x)$ определены и непрерывны в интервале $[a, b]$, то система* (105) *имеет единственное решение*

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),\ \ldots,\ y_n = y_n(x), \qquad (107)$$

определенное (и непрерывно дифференцируемое) во всем интервале $[a, b]$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0, \qquad (108)$$

где начальное значение независимой переменной x_0 должно принадлежать интервалу $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$, а начальные значения искомых функций $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ можно задавать совершенно произвольно.

Заметим, что правые части системы (105) определены и непрерывны в области

$$R\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ |y_1| < +\infty,\ |y_2| < +\infty,\ \ldots\ |y_n| < +\infty \qquad (109)$$

и удовлетворяют в этой области условию Липшица относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, причем $L = K$, где

$$|p_{kl}(x)| \leqslant K \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \qquad (110)$$

(см. п. 1, пример 7). Далее, так как область R не ограничена, то из непрерывности правых частей системы (105) не следует их ограниченность в R. Зато здесь нет опасности, что последовательные приближения выйдут из области R.

Принимая во внимание эти замечания, выполним доказательство теоремы Пикара для линейной системы (105), следуя плану доказательства теоремы Пикара для нормальной системы (85) общего вида и внося соответствующие изменения.

1) Заменим задачу Коши (105)—(108) системой интегральных уравнений

$$y_k = y_k^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \left[\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\, y_l + f_k(x)\right] dx \qquad (111)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

или

$$y_k = y_k^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \varphi_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\, dx \qquad (112)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

2) Строим последовательные приближения

$$y_k^{(0)}(x) = y_k^{(0)},$$
$$y_k^{(m)}(x) = y_k^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \varphi_k\left(x,\ y_1^{(m-1)},\ y_2^{(m-1)},\ \ldots,\ y_n^{(m-1)}\right) dx \qquad (113)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Так же, как и в общем случае, получим n последовательностей

$$y_k^{(0)},\ y_k^{(1)}(x),\ y_k^{(2)}(x),\ \ldots,\ y_k^{(m)}(x),\ \ldots \qquad (114)$$
$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Все функции $y_k^{(m)}$ определены и непрерывны во всем интервале $[a, b]$ (почему?).

3) Докажем, что последовательности (114) равномерно сходятся в интервале $[a, b]$.

Для этого рассмотрим ряды

$$y_k^{(0)}+\left[y_k^{(1)}-y_k^{(0)}\right]+\left[y_k^{(2)}-y_k^{(1)}\right]+\ldots+\left[y_k^{(m)}-y_k^{(m-1)}\right]+\ldots \quad (115)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Оценим члены этих рядов. Имеем:

$$\left|y_k^{(1)}-y_k^{(0)}\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_k\left(x,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)\right|dx\right| \quad (116)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь $\varphi_k\left(x,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)$ есть функция, зависящая только от x, определенная и непрерывная в замкнутом интервале $[a, b]$ и, следовательно, ограниченная в нем:

$$\left|\varphi_k\left(x,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)\right|\leqslant M. \quad (117)$$

Поэтому

$$\left|y_k^{(1)}-y_k^{(0)}\right|\leqslant M\left|x-x_0\right| \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (118)$$

Пользуясь этой оценкой и условием Липшица, так же как и в общем случае, получим для общего члена ряда (115) оценку:

$$\left|y_k^{(m)}-y_k^{(m-1)}\right|\leqslant M\,(nK)^{m-1}\frac{|x-x_0|^m}{m!} \quad (119)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда

$$\left|y_k^{(m)}-y_k^{(m-1)}\right|\leqslant M\,(nK)^{m-1}\frac{(b-a)^m}{m!} \quad (120)$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Поэтому последовательности (114) равномерно сходятся во всем интервале $[a, b]$, а предельные функции $y_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ непрерывны в этом интервале.

4) Предельные функции $y_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (111) (почему?).

5) Единственность найденного решения доказывается так же, как и в общем случае.

Подчеркнем две особенности теоремы Пикара для линейной системы: а) начальные значения искомых функций $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ можно задавать произвольно; б) решение определено во всем интервале непрерывности коэффициентов $p_{kl}(x)$ и функций $f_k(x)$, т. е. во всем интервале непрерывности правых частей системы как функций относительно x (в то время как в общем случае оно определено лишь в интервале $|x-x_0|\leqslant h$).

Для одного **линейного** уравнения первого порядка эти особенности установлены в главе I (см. стр. 46).

В доказанной теореме Пикара предполагалось, что функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ непрерывны в **замкнутом** интервале $[a, b]$. Если они непрерывны в интервалах вида (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, то для каждого из них имеет место аналогичная теорема существования и единственности (почему?).

Если функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ непрерывны при всех x, то система (105) имеет единственное решение (107), удовлетворяющее начальным условиям (108), где все начальные данные можно задавать произвольно, причем это решение будет определено при всех x (почему?). Это имеет место, например, в случае, когда функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ являются **полиномами**.

Если эти функции являются отношениями полиномов $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то за начальное значение независимой переменной можно брать любое число, при котором ни один из знаменателей не обращается в нуль. Это решение будет заведомо определено (и непрерывно дифференцируемо) до ближайшего **вещественного** корня уравнений $Q(x)=0$.

Рассмотрим **однородную** линейную систему (106):

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\,y_l \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

коэффициенты $p_{kl}(x)$ которой определены и непрерывны в интервале (a, b) (или в интервале другого вида). Поставим *нулевые* начальные условия

$$y_1=0,\quad y_2=0,\ \ldots,\ y_n=0 \quad \text{при } x=x_0\in(a,\ b). \tag{121}$$

Система (106) имеет единственное решение, удовлетворяющее этим начальным условиям (почему?). Но она всегда имеет *нулевое* решение: *

$$y_1\equiv 0,\quad y_2\equiv 0,\ \ldots,\ y_n\equiv 0, \tag{122}$$

которое, очевидно, удовлетворяет начальным условиям (121).

Следовательно, *единственным решением однородной линейной системы* (106), *удовлетворяющим* ***нулевым*** *начальным условиям* (121), *является* ***нулевое*** *решение* (122).

* Нулевое решение (122) называют также *очевидным*, или *тривиальным*.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -z, \\ \frac{dz}{dx} &= y. \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

Эта система имеет единственное решение, удовлетворяющее любым заданным начальным условиям, причем это решение будет определено при всех x (почему?). В частности, единственным решением, удовлетворяющим нулевым начальным условиям

$$y = 0, \quad z = 0 \quad \text{при } x = x_0, \tag{124}$$

будет

$$y \equiv 0, \quad z \equiv 0. \tag{125}$$

Найдем методом Пикара решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 1, \quad z = 0 \quad \text{при } x = 0. \tag{126}$$

Соответствующей системой интегральных уравнений будет

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 - \int_0^x z\,dx, \\ z &= \int_0^x y\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

Строим последовательные приближения

$$\left.\begin{array}{ll} y_0(x) \equiv 1 & z_0(x) \equiv 0; \\ y_1(x) = 1 - \int_0^x 0 \cdot dx = 1, & z_1(x) = \int_0^x 1 \cdot dx = x; \\ y_2(x) = 1 - \int_0^x x\,dx = 1 - \frac{x^2}{2}, & z_2(x) = \int_0^x 1 \cdot dx = x; \\ y_3(x) = 1 - \int_0^x x\,dx = 1 - \frac{x^2}{2}, & z_3(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = x - \frac{x^3}{3!}; \\ y_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, & z_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}; \\ y_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, & z_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{128}$$

Последовательности

$$\left.\begin{array}{l} y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x), \ldots \\ z_0(x),\ z_1(x),\ z_2(x), \ldots \end{array}\right\} \tag{129}$$

сходятся при всех x. Предельные функции $y(x) = \cos x$, $z(x) = \sin x$ образуют искомое решение.

Пример 2. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x+1}z, \\ \frac{dz}{dx} &= y. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

Какое начальное значение x_0 можно задавать, чтобы решение существовало и было единственным? В каком интервале определено это решение?

Согласно теореме Пикара, можно брать любое $x_0 \neq -1$. Если $x_0 < -1$, то решение с любыми начальными значениями искомых функций будет заведомо существовать в интервале $(-\infty, -1)$. Если же $x_0 > -1$, то оно будет определено в интервале $(-1, +\infty)$.

Найдем второе приближение к решению, удовлетворяющему начальным условиям

$$y = 2, \quad z = 3 \quad \text{при } x = 0. \tag{131}$$

Имеем:

$$y = 2 + \int_0^x \frac{z}{x+1}\,dx, \; z = 3 + \int_0^x y\,dx;$$

$$y_0(x) \equiv 2, \quad z_0(x) \equiv 3;$$

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x \frac{3}{x+1}\,dx = 2 + 3\ln(x+1),$$

$$z_1(x) = 3 + \int_0^x 2dx = 3 + 2x;$$

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x \frac{3+2x}{x+1}\,dx = 2 + 2x + \ln(x+1),$$

$$z_2(x) = 3 + \int_0^x [2 + 3\ln(x+1)]\,dx = 3 - x + 3(x+1)\ln(x+1).$$

5. Пусть дано уравнение n-го порядка, разрешенное относительно производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{132}$$

и поставлены начальные условия:

$$y = y_0, \; y' = y_0', \; \ldots, \; y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0. \tag{133}$$

Какие начальные данные можно задавать, каким условиям должна удовлетворять правая часть уравнения (132), чтобы решение с этими начальными данными заведомо существовало и было единственно, в каком интервале изменения x оно будет определено?

Чтобы ответить на эти вопросы заменим уравнение (132) равносильной ему нормальной системой n-го порядка.

Полагая (согласно п. **12**, гл. IV)

$$y=y_1,\quad y'=y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_n, \tag{134}$$

придем к нормальной системе:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\
&\frac{dy_2}{dx}=y_3,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n,\\
&\frac{dy_n}{dx}=f(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)
\end{aligned}\right\} \tag{135}$$

с начальными условиями

$$y_1=y_0,\ y_2=y_0',\ \ldots,\ y_n=y_0^{(n-1)}\quad \text{при}\ x=x_0. \tag{136}$$

Задача Коши (132)—(133) равносильна задаче Коши (135)—(136), существование и единственность решения которой гарантируются теоремой Пикара, п. **3**.

Все правые части системы (135), кроме последней, заведомо удовлетворяют условию этой теоремы при любых начальных условиях, в том числе и при условиях (136). Подчиним правую часть последнего из уравнений (135) соответствующим условиям. Предположим, что $f(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ определена в области

$$R:\ |x-x_0|\leqslant a,\quad |y_k-y_k^{(0)}|\leqslant b$$
$$(a>0,\ b>0,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{137}$$

и удовлетворяет в ней двум условиям:

1) $f(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ непрерывна и, следовательно, ограничена:

$$|f(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n|\leqslant M\quad (M>0); \tag{138}$$

2) $f(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ удовлетворяет условию Липшица относительно всех аргументов, кроме первого

$$|f(x,\ \bar{\bar{y}}_1,\ \bar{\bar{y}}_2,\ \ldots,\ \bar{\bar{y}}_n)-f(x,\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_n)|\leqslant$$
$$\leqslant L\sum_{i=1}^{n}|\bar{\bar{y}}_i-\bar{y}_i|, \tag{139}$$

где $L>0$, а $(x,\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_n)$ и $(x,\ \bar{\bar{y}}_1,\ \bar{\bar{y}}_2,\ \ldots,\ \bar{\bar{y}}_n)$ — любые точки области R.

Тогда в области R будут выполнены условия теоремы Пикара для всей системы (135), и задача Коши (135) — (136) будет иметь единственное решение

$$y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x), \tag{140}$$

определенное в интервале

$$|x-x_0|\leqslant h, \tag{141}$$

где

$$h=\min\left(a,\ \frac{b}{\max\limits_R(|y_2|,\ |y_3|,\ \ldots,\ |y_n|,\ M)}\right) \tag{142}$$

(почему?).

Возвращаясь к задаче Коши (132)—(133), получим следующую теорему существования и единственности для уравнения (132).

Теорема Пикара. *Если правая часть уравнения* (132) *определена в области*

$$R:\ |x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b,\ |y'-y'_0|\leqslant b,\ \ldots$$
$$\ldots,\ |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}|\leqslant b \tag{143}$$

и удовлетворяет в ней двум условиям:

1) $f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ *непрерывна и, следовательно, ограничена:*

$$|f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})|\leqslant M\quad (M>0); \tag{144}$$

2) $f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ *удовлетворяет условию Липшица относительно* $y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}$:

$$|f(x,\ \bar{\bar{y}},\ \bar{\bar{y}}',\ \ldots,\ \bar{\bar{y}}^{(n-1)})-f(x,\ \bar{y},\ \bar{y}',\ \ldots,\ \bar{y}^{(n-1)})|\leqslant$$
$$\leqslant L\sum_{k=0}^{n-1}|\bar{\bar{y}}^{(k)}-\bar{y}^{(k)}|, \tag{145}$$

где $L>0$, $y^{(0)}\equiv y$, *а* $(x,\ \bar{y},\ \bar{y}',\ \ldots,\ \bar{y}^{(n-1)})$ *и* $(x,\ \bar{\bar{y}},\ \bar{\bar{y}}',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ — *любые точки области* R, *то уравнение* (132) *имеет единственное решение*

$$y=y(x), \tag{146}$$

удовлетворяющее начальным условиям (133), *определенное в интервале*

$$|x-x_0|\leqslant h, \tag{147}$$

где

$$h=\min\left(a,\ \frac{b}{\max\limits_R(|y'|,\ |y''|,\ \ldots,\ |y^{(n-1)}|,\ M)}\right). \tag{148}$$

Условие Липшица (145) будет заведомо выполнено, если правая часть уравнения (132) имеет ограниченные частные производные по всем аргументам, кроме x:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right| \leqslant K \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{149}$$

причем $L=K$. Поэтому доказанная теорема Пикара влечет за собой справедливость теоремы Пикара в упрощенной формулировке, сформулированной в главе III, где условие (145) заменено более грубым условием (149).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y''=\frac{3}{2}y^2. \tag{150}$$

Это уравнение имеет единственное решение $y=y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y=y_0, \quad y'=y_0' \text{ при } x=x_0, \tag{151}$$

где числа x_0, y_0 и y_0' можно задавать произвольно (почему?). Но оно, вообще говоря, не будет определено при всех x. Например, решением с начальными условиями

$$y=4, \quad y'=-8 \text{ при } x=1 \tag{152}$$

будет

$$y=\frac{4}{x^2}. \tag{153}$$

Это решение определено только в интервале $(0, +\infty)$. Оно обладает свойством $y\to\infty$ при $x\to 0$, несмотря на то, что правая часть уравнения непрерывна относительно x при всех значениях x. Для линейных уравнений, как мы увидим ниже, такого явления быть не может.

6. Рассмотрим линейное уравнение

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+ \\ +p_n(x)y=f(x). \tag{154}$$

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (154) принимает вид

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+ \\ +p_n(x)y=0 \tag{155}$$

и называется *однородным*. В противном случае оно называется *неоднородным*.

Для уравнения (154) имеет место следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема Пикара. *Если коэффициенты $p_k(x)$ и функция $f(x)$ определены и непрерывны в интервале $[a, b]$, то уравнение* (154) *имеет единственное решение*

$$y=y(x), \tag{156}$$

определенное во всем интервале $[a, b]$ *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$y=y_0, \quad y'=y_0', \ldots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x=x_0, \tag{157}$$

где $x_0 \in [a, b]$, *а числа* $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ *можно задавать произвольно.*

Действительно, приводя уравнение (154) к нормальной системе n-го порядка, получим линейную систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx}=y_2, \\ &\frac{dy_2}{dx}=y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx}=y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx}=-p_1(x)y_n-p_2(x)y_{n-1}-\ldots-p_{n-1}(x)y_2- \\ &\qquad\qquad -p_n(x)y_1+f(x). \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

Решению уравнения (154) с начальными условиями (157) соответствует решение системы (158), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1=y_0, \quad y_2=y_0', \ldots, y_n=y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x=x_0. \tag{159}$$

Система (158) удовлетворяет условиям теоремы Пикара (почему?). Поэтому она имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (159), причем это решение будет определено во всем интервале $[a, b]$. А тогда и уравнение (154) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (157) и определенное во всем интервале $[a, b]$.

Теорема Пикара для линейного уравнения имеет те же две особенности, что и теорема Пикара для линейной системы: а) полный произвол выбора начальных значений $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, б) существование решения задачи Коши во всем интервале непрерывности коэффициентов $p_k(x)$ и функции $f(x)$.

Она, так же как и в случае линейной системы, переносится на интервалы вида (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$. Если $p_k(x)$ и $f(x)$ непрерывны в интервале $(-\infty, +\infty)$, то все начальные данные можно задавать произвольно, и решение существует при всех x.

Из теоремы Пикара следует, что если $p_k(x)$ и $f(x)$ являются полиномами или отношениями полиномов $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то в первом случае решение с любыми начальными данными существует при всех x, а во втором начальное значение x_0 не должно обращать в нуль ни один из знаменателей, и решение определено до ближайшего вещественного значения x, при котором знаменатели $Q(x)$ обращаются в нуль.

Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+ \\ +p_n(x)y=0, \qquad (160)$$

коэффициенты которого непрерывны в интервале (a, b) (или в интервале другого вида).

Однородное линейное уравнение (160) всегда имеет нулевое решение:

$$y\equiv 0. \qquad (161)$$

Если коэффициенты уравнения (160) *непрерывны в интервале* (a, b), *то единственным решением, удовлетворяющим нулевым начальным условиям*

$$y=0, \quad y'=0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}=0 \quad \textit{при} \ x=x_0\in(a, b),$$

является нулевое решение (161) (почему?).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y''+x^2y=0. \qquad (162)$$

Всякое решение этого уравнения определено при всех x (почему?). В квадратурах это уравнение не интегрируется, ибо подстановкой

$$\frac{y'}{y}=z$$

оно приводится к специальному уравнению Риккати

$$z'+z^2=-x^2, \qquad (163)$$

которое не интегрируется в квадратурах (почему?).

Найдем второе приближение к решению уравнения (162), удовлетворяющему начальным условиям

$$y=1, \quad y'=0 \quad \text{при } x=0. \qquad (164)$$

Полагая

$$y=y_1, \quad y'=y_2, \qquad (165)$$

приведем уравнение (162) к нормальной системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx}&=y_2, \\ \frac{dy_2}{dx}&=-x^2y_1. \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

Мы должны найти второе приближение к решению этой системы, удовлетворяющему начальным условиям

$$y_1=1, \quad y_2=0 \quad \text{при } x=0. \qquad (167)$$

Заменим задачу Коши (166) — (167) соответствующей системой интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 1 + \int_0^x y_2 dx, \\ y_2 &= -\int_0^x x^2 y_1 dx. \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

Далее имеем:

$$\left.\begin{aligned} &y_1^{(0)}(x) \equiv 1, && y_2^{(0)}(x) \equiv 0; \\ &y_1^{(1)}(x) = 1 + \int_0^x 0 \cdot dx = 1, && y_2^{(1)}(x) = -\int_0^x x^2 \cdot 1 dx = -\frac{x^3}{3}; \\ &y_1^{(2)}(x) = 1 - \int_0^x \frac{x^3}{3} dx = 1 - \frac{x^4}{12}, && y_2^{(2)}(x) = -\int_0^x x^2 \cdot 1 dx = -\frac{x^3}{3}. \end{aligned}\right\} \tag{169}$$

Следовательно, вторым приближением к искомому решению будет

$$y = 1 - \frac{x^4}{12}. \tag{170}$$

Это есть приближенное решение задачи Коши (162)—(164). Оно заведомо удовлетворяет начальным условиям (164) (почему?). Мы можем пользоваться этим приближенным решением при всех x, ибо последовательные приближения сходятся при всех x.

§ 2. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ (ДВИЖЕНИЯ)

7. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \tag{1}$$

правая часть которого зависит от параметра λ. Решения этого уравнения тоже будут зависеть от λ. Каков характер этой зависимости?

Теорема. *Предположим, что правая часть уравнения* (1) *определена как функция от x и y в прямоугольнике*

$$R: |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b \quad (a > 0,\ b > 0) \tag{2}$$

и как функция параметра λ в интервале

$$\lambda^{(1)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{(2)} \tag{3}$$

и удовлетворяет двум условиям:

1) *$f(x, y, \lambda)$ непрерывна относительно x, y, λ в области* (2), (3) *и, следовательно, ограничена в ней:*

$$|f(x, y, \lambda)| \leqslant M, \tag{4}$$

где (x, y) — любая точка из прямоугольника R, λ — любое число из интервала (3), *а M — постоянное положительное число, не зависящее от λ;*

2) $f(x, y, \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица относительно y в области (2), (3), т. е.

$$|f(x, \bar{\bar{y}}, \lambda) - f(x, \bar{y}, \lambda)| \leqslant L\,|\bar{\bar{y}} - \bar{y}|, \tag{5}$$

где $(x, \bar{y})$ и $(x, \bar{\bar{y}})$ — любые точки из области R, λ — любое число из интервала (3), а L — постоянное положительное число, не зависящее от λ.

Тогда уравнение (1) имеет единственное решение:

$$y = y(x, \lambda), \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0 \quad \text{при } x = x_0. \tag{7}$$

Это решение определено (и непрерывно дифференцируемо) как функция от x в интервале

$$|x - x_0| \leqslant h, \tag{8}$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \tag{9}$$

и непрерывно как функция параметра λ в интервале (3) равномерно относительно независимой переменной x из интервала (8), т. е. по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\Delta\lambda| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$|y(x, \lambda + \Delta\lambda) - y(x, \lambda)| < \varepsilon \tag{10}$$

одновременно для всех x из интервала (8).

Доказательство аналогично доказательству теоремы Пикара (п. **2**), следует только внести соответствующие изменения, вызванные наличием параметра λ.

1) Заменим задачу Коши (1)—(7) интегральным уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y, \lambda)\,dx. \tag{11}$$

2) Будем решать уравнение (11) методом Пикара. Строим последовательные приближения:

$$\left.\begin{array}{l}
y_0(x, \lambda) \equiv y_0, \\
y_1(x, \lambda) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_0, \lambda)\,dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n(x, \lambda) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}, \lambda)\,dx, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right\} \tag{12}$$

В результате получим бесконечную последовательность функций

$$y_0,\ y_1(x,\ \lambda),\quad y_2(x,\ \lambda),\ \ldots,\ y_n(x,\ \lambda),\ \ldots \tag{13}$$

Все функции $y_n(x, \lambda)$ определены и непрерывны относительно x и λ в области

$$|x-x_0| \leqslant h,\quad \lambda^{(1)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{(2)} \tag{14}$$

и не выходят при этих значениях x и λ из области R, т. е.

$$|y_n(x,\ \lambda)-y_0| \leqslant b \quad \text{при } |x-x_0| \leqslant h,\ \lambda^{(1)} \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{(2)} \tag{15}$$

(почему?).

3) Покажем, что последовательность (13) равномерно сходится относительно x и λ в области (14). С этой целью рассмотрим ряд

$$y_0+[y_1(x,\ \lambda)-y_0]+[y_2(x,\ \lambda)-y_1(x,\ \lambda)]+\ldots+ \\ +[y_n(x,\ \lambda)-y_{n-1}(x,\ \lambda)]+\ldots \tag{16}$$

Его общий член имеет оценку

$$|y_n(x,\ \lambda)-y_{n-1}(x,\ \lambda)| \leqslant ML^{n-1}\frac{h^n}{n!}, \tag{17}$$

справедливую для всех x и λ из области (14). Поэтому ряд (16) сходится равномерно относительно x и λ в этой области.

Обозначим сумму ряда (16) или, что то же, предельную функцию последовательности (13) через $y(x, \lambda)$. Так как члены ряда (16) непрерывны относительно x и λ в области (14) и ряд (16) сходится в этой области равномерно относительно x и λ, то $y(x, \lambda)$ непрерывна относительно x и λ в области (14).

4) Функция $y=y(x, \lambda)$ не выходит из области R при значениях x и λ из области (14) и удовлетворяет интегральному уравнению (11). Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу в неравенстве (15) и в равенстве, определяющем n-ое приближение $y_n(x, \lambda)$.

5) Единственность решения (6) доказывается так же, как и в теореме Пикара.

Отметим, что в случае линейного уравнения

$$y'+p(x,\ \lambda)y=q(x,\ \lambda) \tag{18}$$

решение (6) будет непрерывно относительно x и λ при всех значениях x и λ, при которых $p(x, \lambda)$ и $q(x, \lambda)$ заданы и непрерывны.

Это непосредственно следует из формулы для решения задачи Коши (18)—(7):

$$y=e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x,\lambda)dx}\left[y_0+\int\limits_{x_0}^{x} q(x,\lambda)\,e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x,\lambda)dx}\,dx\right] \tag{19}$$

(почему?).

Доказанная теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметра распространяется на нормальную систему n-го порядка

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{20}$$

правые части которой зависят от любого конечного числа параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, а также на случай, когда параметры входят в начальные условия. Она распространяется и на уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

8. Докажем, что при условиях теоремы Пикара решение задачи Коши непрерывно зависит от начальных данных.

Теорема. *Если правая часть уравнения*

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{21}$$

удовлетворяет в прямоугольнике

$$R: |x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b \tag{22}$$

обоим условиям теоремы Пикара, то решение

$$y=y(x; x^*, y^*), \tag{23}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y=y^* \text{ при } x=x^*, \tag{24}$$

является непрерывной функцией от x и начальных данных x^*, y^*, когда x изменяется в интервале

$$|x-x_0|\leqslant\frac{h}{2}-\omega, \tag{25}$$

и точка (x^*, y^*) лежит в области

$$R^*: |x^*-x_0|\leqslant\omega, \; |y^*-y_0|\leqslant\frac{b}{2}, \tag{26}$$

где

$$h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right), \; 0\leqslant\omega<\frac{h}{4}. \tag{27}$$

При этом решение (23) *будет непрерывно как функция начальных данных x^*, y^* в области* (26) *равномерно относительно x из интервала* (25), *т. е. по любому $\varepsilon>0$ най-*

дется такое $\delta>0$, *что при* $|\Delta x^*|<\delta$, $|\Delta y^*|<\delta$ *будет выполняться неравенство*

$$|y(x;\ x^*+\Delta x^*,\ y^*+\Delta y^*)-y(x;\ x^*,\ y^*)|<\varepsilon \tag{28}$$

одновременно для всех x *из интервала* (25).

Основная идея приводимого ниже доказательства этой теоремы состоит в замене уравнения (21) новым уравнением, в которое начальные данные x^*, y^* входят в качестве параметров, и использовании теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров.

Сделаем в уравнении (21) замену переменных:

$$x-x^*=\xi,\quad y-y^*=\eta. \tag{29}$$

Тогда уравнение (21) примет вид

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f(\xi+x^*,\ \eta+y^*)\equiv f_1(\xi,\ \eta;\ x^*,\ y^*), \tag{30}$$

а вместо начальных условий (24) получим

$$\eta=0 \text{ при } \xi=0. \tag{31}$$

Покажем, что уравнение (30), в которое величины x^*, y^* входят в качестве параметров, имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям (31), и что это решение непрерывно зависит от x^* и y^*.

Действительно, правая часть уравнения (30) удовлетворяет условиям теоремы Пикара в области, определенной неравенствами

$$|\xi+x^*-x_0|\leqslant a,\quad |\eta+y^*-y_0|\leqslant b, \tag{32}$$

которые будут заведомо выполнены, если

$$|\xi|\leqslant\frac{a}{2},\ |\eta|\leqslant\frac{b}{2} \tag{33}$$

и

$$|x^*-x_0|\leqslant\frac{a}{2},\ |y^*-y_0|\leqslant\frac{b}{2}. \tag{34}$$

Отсюда следует, что правая часть уравнения (30) удовлетворяет условиям теоремы о непрерывной зависимости решения от параметров. Поэтому уравнение (30) имеет единственное решение:

$$\eta=\eta(\xi;\ x^*,\ y^*), \tag{35}$$

удовлетворяющее начальным условиям (31). Это решение определено как функция от ξ в интервале

$$|\xi|\leqslant\frac{h}{2} \tag{36}$$

и как функция от параметров x^*, y^* в области (34). Решение (35) является непрерывной функцией ξ и параметров x^*, y^* в области (36), (34).

Возвращаясь в формуле (35) к старым переменным x и y, получим:

$$y = y^* + \eta(x - x^*;\ x^*,\ y^*). \tag{37}$$

Это есть решение уравнения (21), удовлетворяющее начальным условиям (24) и потому совпадающее с решением (23), так что

$$y = y^* + \eta(x - x^*;\ x^*,\ y^*) \equiv y(x;\ x^*,\ y^*). \tag{38}$$

Решение (38) или, что то же, решение (23) определено как функция начального значения y^* в области

$$|y^* - y_0| \leqslant \frac{b}{2} \tag{39}$$

и как функция x и x^* при значениях x и x^*, удовлетворяющих неравенству

$$|x - x^*| \leqslant \frac{h}{2}, \tag{40}$$

вытекающему из неравенства (36). Неравенство (40) будет заведомо выполнено, если

$$|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega, \quad |x^* - x_0| \leqslant \omega. \tag{41}$$

Так как решение (35) уравнения (30) непрерывно относительно ξ, x^* и y^* в области (36), (34), то решение (23) уравнения (21) непрерывно относительно x, x^* и y^* в области (25), (26). Теорема доказана.

Заметим, что если начальное значение x^* независимой переменной x не изменять, считая $x^* = x_0$ $(\omega = 0)$, то решение (23) будет непрерывной функцией начального значения y^* искомой функции y в области (39) равномерно относительно x из интервала

$$|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2}. \tag{42}$$

В случае линейного уравнения

$$y' + p(x)\, y = q(x) \tag{43}$$

решение (23) будет непрерывной функцией от x и начальных данных x^*, y^* при **всех** x и x^* из интервала непрерывности коэффициента $p(x)$ и правой части $q(x)$. Это непосредственно следует из того, что решение (23) в этом случае можно записать в виде

$$y = e^{-\int\limits_{x^*}^{x} p(x)\,dx} \left[y^* + \int\limits_{x^*}^{x} q(x)\, e^{\int\limits_{x^*}^{x} p(x)\,dx}\, dx \right] \tag{44}$$

(почему?).

Доказанная теорема распространяется на нормальную систему n-го порядка и на уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

9. Рассмотрим нормальную систему вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

где t — время, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки фазового пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

При выполнении условий теоремы Пикара решение (движение)

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t), \tag{46}$$

определяемое системой (45) и начальными условиями

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)},\ \ldots,\ x_n = x_n^{(0)} \text{ при } t = t_0, \tag{47}$$

непрерывно как функция начальных данных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ (в некоторой области их изменения) равномерно относительно t из некоторого к о н е ч н о г о интервала изменения времени. (Мы используем здесь случай теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных, когда начальное значение независимой переменной не изменяется.)

В тех случаях, когда непрерывная зависимость решения (движения) от начальных значений искомых функций имеет место равномерно относительно t на всем полубесконечном интервале изменения $t\,(t \geqslant t_0)$, говорят, что решение (движение) (46) обладает свойством *устойчивости* при $t \to +\infty$.

Предположим, что правые части системы (45) обращаются в точке $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$ в нуль при всех рассматриваемых значениях времени $t\,(t \geqslant t_0)$. Тогда система (46) определяет н у л е в о е решение.

$$x_1 \equiv 0,\ x_2 \equiv 0,\ \ldots,\ x_n \equiv 0. \tag{48}$$

Это решение удовлетворяет н у л е в ы м начальным условиям:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0 \text{ при } t = t_0. \tag{49}$$

Решение (48) мы будем называть *невозмущенным решением*, а соответствующее ему движение — *невозмущенным движением*.

Всякое решение (46), удовлетворяющее начальным условиям (47), где хотя бы одно из начальных данных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots$

..., $x_n^{(0)}$ отлично от нуля, будем называть *возмущенным решением*, соответствующее ему движение — *возмущенным движением*, а числа $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$ — *возмущениями*.

Предположим, что рассматриваемые возмущенные решения определены при всех значениях $t \geqslant t_0$.

Определение 1. Невозмущенное решение (движение) (48) называется *устойчивым в смысле Ляпунова* при $t \to +\infty$, когда все возмущенные решения (46), соответствующие достаточно малым возмущениям $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, ..., $x_n^{(0)}$, будут при всех значениях $t \geqslant t_0$ находиться в сколь угодно малой окрестности этого невозмущенного решения, т. е. по любому положительному числу $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное число $\delta > 0$, что из неравенств

$$|x_1^{(0)}| < \delta, \ |x_2^{(0)}| < \delta, \ \ldots, \ |x_n^{(0)}| < \delta \qquad (50)$$

следуют неравенства

$$|x_1(t)| < \varepsilon, \ |x_2(t)| < \varepsilon, \ \ldots, \ |x_n(t)| < \varepsilon \qquad (51)$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Дадим геометрическое и механическое истолкование этого определения в случае $n = 2$.

Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y), \qquad (52)$$

где

$$X(t, 0, 0) = 0, \quad Y(t, 0, 0) = 0 \text{ при } t \geqslant t_0. \qquad (53)$$

Здесь t — время, а x и y — координаты точки на фазовой плоскости (x, y).

Устойчивость движения

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0 \qquad (54)$$

— состояния покоя, определяемого системой (52), означает, что какой бы квадрат со стороны 2ε с центром в начале координат — точке покоя — ни взять, всегда найдется такой вложенный в него квадрат со стороной 2δ (рис. 39), что все возмущенные движения, начинающиеся (при $t = t_0$) внутри второго квадрата, будут оставаться внутри первого квадрата при всех значениях $t \geqslant t_0$.

Определение 2. Если хотя бы для одного $\varepsilon > 0$ не существует соответствующего $\delta > 0$, то решение (48) называется *неустойчивым*.

Определение 3. Решение (48) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, все возмущенные решения (46), соответствующие достаточно малым возмущениям, обладают свойством

$$x_1(t) \to 0,\ x_2(t) \to 0,\ \ldots,\ x_n(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{55}$$

Для системы (52) асимптотическая устойчивость движения (54) означает, что все движения, начинающиеся при $t=t_0$ внутри квадрата со стороной 2δ, не только остаются внутри квадрата со стороной 2ε, но и стремятся к состоянию покоя (54) при $t \to +\infty$.

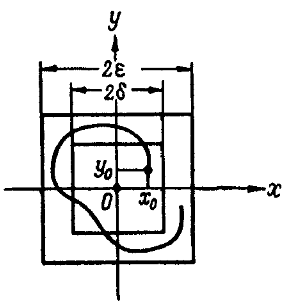

Рис. 39.

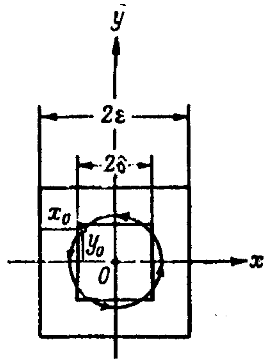

Рис. 40.

Определение 4. Если невозмущенное решение (48) неустойчиво, но по любому положительному числу $\varepsilon > 0$ можно найти такое положительное число $\delta > 0$, что при возмущениях, подчиненных некоторым условиям вида

$$f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = 0 \text{ или } f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \geqslant 0, \tag{56}$$

где $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$, из неравенств (50) следуют неравенства (51) при всех $t \geqslant t_0$, то такое невозмущенное решение называется *условно устойчивым*.

Судить о наличии (отсутствии) устойчивости проще всего в тех случаях, когда известно общее решение, особенно если оно задано в форме Коши.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x. \tag{57}$$

Примем здесь и в дальнейших примерах $t_0 = 0$.

Решение (движение)

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0, \tag{58}$$

определяемое этой системой, устойчиво, но не асимптотически.

Действительно из общего решения в форме Коши *

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 \cos t - y_0 \sin t \equiv x(t), \\ y &= x_0 \sin t + y_0 \cos t \equiv y(t), \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

где $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, следует, что все возмущенные решения (т. е. решения с любыми начальными данными x_0, y_0) определены при всех $t \geqslant 0$, и если x_0 и y_0 достаточно малы, то x и y будут сколь угодно малы при всех $t \geqslant 0$, т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, чтобы из

$$|x_0| < \delta, \ |y_0| < \delta \tag{60}$$

следовало

$$|x(t)| < \varepsilon, \ |y(t)| < \varepsilon \ \text{ при всех } t \geqslant 0. \tag{61}$$

Достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, решение (58) устойчиво. Асимптотической устойчивости нет, ибо возмущенные решения, очевидно, не обладают свойством

$$x(t) \to 0, \ y(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{62}$$

Возмущенные движения (59), начинающиеся (при $t = 0$) внутри квадрата со стороной 2δ ($2\delta = \varepsilon$), остаются при всех $t \geqslant 0$ внутри квадрата со стороной 2ε, но не стремятся к состоянию покоя (58) при $t \to +\infty$. Траекториями возмущенных движений (59) являются окружности (рис. 40)

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2. \tag{63}$$

Если $|x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, то радиусы этих окружностей меньше ε. Отсюда мы снова видим, что движения (59), начинающиеся внутри квадрата со стороной 2δ, остаются при всех $t \geqslant 0$ внутри квадрата со стороной 2ε, но не стремятся к состоянию покоя (58) при $t \to +\infty$.

Пример 2. Для системы

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y \tag{64}$$

нулевое решение

$$x \equiv 0, \quad y \equiv 0 \tag{65}$$

будет асимптотически устойчивым.

В самом деле возмущенные решения имеют вид

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-2t}, \tag{66}$$

откуда видно, что решение (65) устойчиво ($\delta = \varepsilon$). Кроме того, все возмущенные решения (66) обладают свойством

$$x(t) \to 0, \quad y(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{67}$$

Траекториями возмущенных движений (66) являются полупараболы

$$y = \frac{y_0}{x_0^2} x^2 \quad (x \neq 0) \tag{68}$$

и полуоси координат

$$y = 0 \quad (x \neq 0), \ x = 0 \quad (y \neq 0) \tag{69}$$

(рис. 41). Здесь все движения, начинающиеся в квадрате со стороной 2δ ($2\delta = 2\varepsilon$), не только остаются внутри квадрата со стороной 2ε, но и стремятся к состоянию покоя (65) при $t \to +\infty$.

* См. гл. IV, п. 6, пример.

Пример 3. Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=x, \quad \frac{dy}{dt}=2y. \tag{70}$$

Здесь нулевое решение

$$x\equiv 0, \quad y\equiv 0, \tag{71}$$

очевидно, неустойчиво, ибо из вида общего решения

$$x=x_0e^t, \quad y=y_0e^{2t} \tag{72}$$

ясно, что какие бы малые возмущения x_0, y_0 ни взять, мы не можем обеспечить выполнение неравенств

$$|x(t)|<\varepsilon, \quad |y(t)|<\varepsilon \text{ при всех } t\geqslant 0.$$

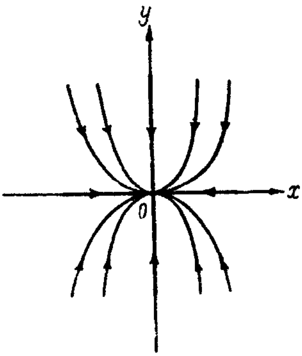

Рис. 41.

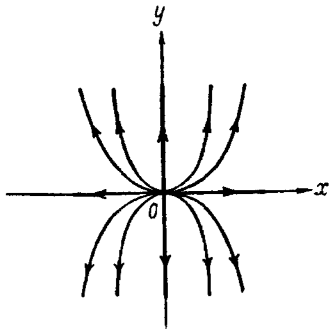

Рис. 42.

Траекториями возмущенных движений будут те же полупараболы (68) и полуоси координат (69) (рис. 42), что и в предыдущем примере, но движения происходят в обратном направлении, и они, очевидно, покидают любой квадрат со стороной 2ε в каком бы малом квадрате со стороной 2δ они ни начинались.

Заметим, что решение (71) будет асимптотически устойчиво при $t\to-\infty$. В подобных случаях говорят, что решение (71) *абсолютно неустойчиво.*

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=-x, \quad \frac{dy}{dt}=y. \tag{73}$$

Решение (движение)

$$x\equiv 0, \quad y\equiv 0, \tag{74}$$

определяемое этой системой, неустойчиво. Это вытекает из вида возмущенных движений

$$x=x_0e^{-t}, \quad y=y_0e^t \tag{75}$$

(почему?).

Но если ограничиться рассмотрением возмущенных движений частного вида

$$x=x_0e^{-t}, \quad y\equiv 0, \tag{76}$$

т. е. подчинить возмущение y_0 условию

$$y_0=0, \tag{77}$$

то для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$.

Можно положить $\delta=\varepsilon$. Поэтому решение (74) условно устойчиво.

Обратимся к траекториям движений (75) и (76). Траекториями движений (75) являются (равнобочные) гиперболы

$$xy=x_0y_0 \tag{78}$$

и полуоси координат

$$y=0\ \ (x\neq 0),\quad x=0\ \ (y\neq 0) \tag{79}$$

(рис. 43). Все движения, кроме движений (76), покидают любой квадрат со стороной 2ε, в каком бы малом квадрате со стороной 2δ они ни начинались, так что мы снова убеждаемся, что движение (74) неустойчиво.

Траекториями движений (76) служат полуоси оси Ox. Эти движения остаются в квадрате со стороной 2ε, если они начинаются в квадрате со стороной 2δ $(2\delta=2\varepsilon)$, что и обеспечивает установленную выше условную устойчивость движения (74).

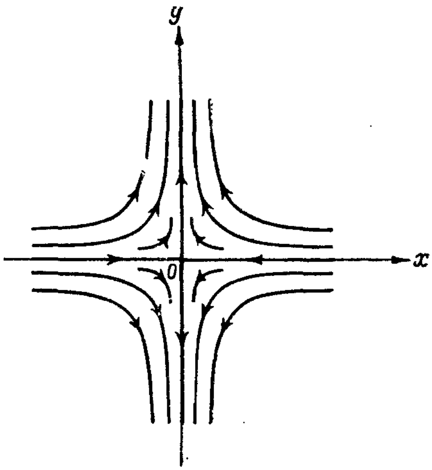

Рис. 43.

В этом пункте мы хотели дать только понятие об устойчивости как о некотором специальном свойстве решения. Некоторые признаки устойчивости и неустойчивости будут даны позднее (см. гл. VII, п. **24**, **25**).

10. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \tag{80}$$

Докажем, что если правая часть этого уравнения не только удовлетворяет условиям теоремы Пикара, но и непрерывно дифференцируема относительно y, то решение задачи Коши будет не только непрерывной, но и непрерывно дифференцируемой функцией (обоих) начальных данных.

Теорема. *Если функция $f(x,\ y)$ удовлетворяет в прямоугольнике*

$$R: |x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b\ (a>0,\ b>0)$$

обоим условиям теоремы Пикара и, кроме того, имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, то решение

$$y=y(x;\ x^*,\ y^*), \tag{81}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y=y^* \text{ при } x=x^*, \tag{82}$$

является непрерывно дифференцируемой функцией от x и начальных данных x^*, y^*, когда x изменяется в интервале

$$|x-x_0|\leqslant\frac{h}{2}-\omega, \tag{83}$$

а точка (x^*, y^*) *лежит в области*

$$R^* : |x^* - x_0| \leqslant \omega, \ |y^* - y_0| \leqslant \frac{b}{2}, \tag{84}$$

где

$$h = \min\left(a, \ \frac{b}{M}\right), \ 0 \leqslant \omega < \frac{h}{4}. \tag{85}$$

Ограничимся доказательством существования (и непрерывности) частной производной $\frac{\partial y}{\partial y^*}$.

Дадим y^* приращение Δy^* настолько малое, чтобы точка $(x^*, \ y^* + \Delta y^*)$ не выходила из R, и построим решение

$$\bar{y} = \bar{y}(x; \ x^*, \ y^* + \Delta y^*), \tag{86}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{y} = y^* + \Delta y^* \text{ при } x = x^*. \tag{87}$$

Рассмотрим функцию

$$u = \frac{\bar{y} - y}{\Delta y^*}. \tag{88}$$

Докажем, что эта функция имеет предел при $\Delta y^* \to 0$ и что этот предел, т. е. $\frac{\partial y}{\partial y^*}$, является непрерывной функцией от $x, \ x^*, \ y^*$ в области (83), (84).

Составим дифференциальное уравнение для функции u. Имеем:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\Delta y^*} \frac{d(\bar{y} - y)}{dx}. \tag{89}$$

Подставляя решения (81) и (86) в уравнение (80) и вычитая почленно первое тождество из второго, получим:

$$\frac{d(\bar{y} - y)}{dx} = f(x, \ \bar{y}) - f(x, \ y). \tag{90}$$

Преобразуем правую часть:

$$f(x, \ \bar{y}) - f(x, \ y) = \frac{f(x, \ \bar{y}) - f(x, \ y)}{\bar{y} - y} (\bar{y} - y) \tag{91}$$

или (используя формулу конечных приращений Лагранжа)

$$f(x, \ \bar{y}) - f(x, \ y) = f'_y [x, \ y + \theta(\bar{y} - y)] (\bar{y} - y) \ (0 < \theta < 1). \tag{92}$$

Поэтому равенство (89) можно записать так

$$\frac{du}{dx} = p(x, \ \Delta y^*) u, \tag{93}$$

где функция

$$p(x, \Delta y^*) = \frac{f(x, \bar{y}) - f(x, y)}{\bar{y} - y} = f'_y[x, y + \theta(\bar{y} - y)] \quad (94)$$

зависит только от x и Δy^*, ибо y и $\bar{y}$ определяются формулами (81) и (86) и зависят от x, x^*, y^*, Δy^*. Но точка (x^*, y^*) фиксирована.

Из (88) в силу начальных условий (82) и (87) следует, что функция u обращается в единицу при $x = x^*$.

Таким образом, функция (88) есть решение однородного линейного уравнения (93) с начальными условиями:

$$u = 1 \text{ при } x = x^*. \quad (95)$$

Коэффициент $p(x, \Delta y^*)$ в уравнении (93) непрерывно зависит от независимой переменной x и параметра Δy^*, когда x изменяется в интервале (83), а $|\Delta y^*|$ достаточно мало.

Чтобы убедиться в этом, возьмем любую точку $(\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y^*})$ из указанной области и рассмотрим два возможных случая.

1) В точке $(\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y^*})$ разность $\bar{y} - y$ не равна нулю. В этом случае непрерывность функции $p(x, \Delta y^*)$ в этой точке следует из формулы

$$p(x, \Delta y^*) = \frac{f(x, \bar{y}) - f(x, y)}{\bar{y} - y}, \quad (96)$$

ибо числитель и знаменатель непрерывны в точке $(\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y^*})$. Последнее вытекает из того, что y есть непрерывная функция от x при $x = \widetilde{x}$; $\bar{y}$ есть непрерывная функция относительно x и Δy^* при $x = \widetilde{x}$ и $\Delta y^* = \widetilde{\Delta y^*}$ (в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных); y и $\bar{y}$ не выходят из области R, в которой функция $f(x, y)$ непрерывна относительно своих аргументов, а тогда (согласно теореме о непрерывности сложной функции) $f(x, y)$ непрерывна относительно x при $x = \widetilde{x}$, а $f(x, \bar{y})$ непрерывна относительно x и Δy^* при $x = \widetilde{x}$, $\Delta y^* = \widetilde{\Delta y^*}$.

2) В точке $(\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y^*})$ разность $\bar{y} - y$ равна нулю. В этом случае мы не можем, очевидно, воспользоваться формулой (96). Воспользуемся вторым представлением функции $p(x, \Delta y^*)$ [см. (94)]:

$$p(x, \Delta y^*) = f'_y[x, y + \theta(\bar{y} - y)]. \quad (97)$$

Имеем:

$$p(\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y^*}) = f'_y[\widetilde{x}, y(\widetilde{x})]. \quad (98)$$

Если $(x, \Delta y^*) \to (\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y}^*)$, то и $\overline{y} - y \to 0$, и, вследствие предположенной непрерывности частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$, будем иметь:

$$f'_y[x, y + \theta(\overline{y} - y)] \to f'_y[\widetilde{x}, y(\widetilde{x})], \tag{99}$$

т. е.

$$p(x, \Delta y^*) \to p(\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y}^*), \tag{100}$$

а это и означает, что функция $p(x, \Delta y^*)$ непрерывна в точке $(\widetilde{x}, \widetilde{\Delta y}^*)$.

В частности, функция $p(x, \Delta y^*)$ непрерывна и при $\Delta y^* = 0$, причем

$$p(x, 0) = f'_y(x, y). \tag{101}$$

Так как уравнение (93) линейное и его коэффициент $p(x, \Delta y^*)$ непрерывно зависит от независимой переменной x при $|x - x_0| \leqslant \frac{h}{2} - \omega$ и относительно параметра Δy^* при достаточно малом $|\Delta y^*|$ и, в частности, при $\Delta y^* = 0$, то оно имеет единственное решение

$$u = u(x;\ x^*,\ 1,\ \Delta y^*), \tag{102}$$

удовлетворяющее начальным условиям (95) и содержащее Δy^* в качестве параметра. Согласно теореме о непрерывной зависимости решения от параметров для случая линейного уравнения, это решение есть непрерывная функция от Δy^* в точке $\Delta y^* = 0$. Вследствие этого существует предел функции (88) при $\Delta y^* \to 0$, а это и означает, что существует $\frac{\partial y}{\partial y^*}$.

Докажем теперь, что $\frac{\partial y}{\partial y^*}$ непрерывна относительно x и начальных данных x^*, y^* в области (83), (84). Для этого заметим, что функция

$$U = \frac{\partial y}{\partial y^*} \tag{103}$$

является решением уравнения

$$\frac{dU}{dx} = f'_y(x, y)\,U \tag{104}$$

с начальными условиями

$$U = 1 \text{ при } x = x^*. \tag{105}$$

В этом легко убедиться, переходя к пределу в (93) и (95) при $\Delta y^* \to 0$.

Уравнение (104) линейное, причем его коэффициент $f'_y(x, y)$ непрерывен относительно независимой переменной x и параметров x^*, y^* в области (83), (84) (почему?). Одно из начальных данных решения (103) тоже зависит от параметра x^* и притом непрерывно. Поэтому решение уравнения (104) с начальными условиями (105) непрерывно относительно x, x^*, y^* в той же области (83), (84), а так как этим решением как раз и является частная производная $\frac{\partial y}{\partial y^*}$, то она является непрерывной функцией от независимой переменной x и начальных данных x^*, y^* в области (83), (84).

Пользуясь формулой общего решения в форме Коши для однородного линейного уравнения, можно написать явное выражение для $\frac{\partial y}{\partial y^*}$:

$$\frac{\partial y}{\partial y^*} = e^{\int\limits_{x^*}^{x} f'_y [x,\, y(x;\, x^*,\, y^*)]\,dx}, \tag{106}$$

откуда снова видим, что $\frac{\partial y}{\partial y^*}$ есть непрерывная функция от x, x^*, y^* в указанной области.

Можно доказать,* что частная производная $\frac{\partial y}{\partial x^*}$ является решением того же уравнения (104), но с другими начальными условиями, а именно:

$$U = -f(x^*, y^*) \text{ при } x = x^*. \tag{107}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial y}{\partial x^*} = -f(x^*, y^*)\, e^{\int\limits_{x^*}^{x} f'_y [x,\, y(x;\, x^*,\, y^*)]\,dx}. \tag{108}$$

Пример. Найти производные от решения уравнения

$$y' = y^2 \tag{109}$$

с начальными условиями

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \ (y_0 \neq 0) \tag{110}$$

по x_0 и y_0.

Решением задачи Коши (109)—(110) будет

$$y = -\frac{1}{x - \left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)}. \tag{111}$$

---

* См.: Матвеев. Методы интегрирования, п. 134; Степанов, стр. 301—302.

Поэтому, пользуясь формулами (106) и (108), получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial y_0} &= e^{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{-2}{x-\left(x_0+\frac{1}{y_0}\right)}dx} = \frac{1}{y_0^2\left[x-\left(x_0+\frac{1}{y_0}\right)\right]^2}; \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} &= -y_0^2 e^{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{-2}{x-\left(x_0+\frac{1}{y_0}\right)}dx} = -\frac{1}{\left[x-\left(x_0+\frac{1}{y_0}\right)\right]^2}. \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

Эти же значения $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial y}{\partial x_0}$ мы получим и из (111).

Доказанная теорема распространяется на нормальную систему n-го порядка* и на уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ

11. Докажем, что при условиях теоремы Пикара существует общее решение.

Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

правая часть которого удовлетворяет условиям теоремы Пикара в прямоугольнике

$$R: \ |x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b \quad (a > 0, \ b > 0). \quad (2)$$

Тогда существует единственное решение

$$y = \varphi(x, x_0, y_0), \quad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \quad (4)$$

Рассмотрим область

$$R_{\frac{1}{2}}: \ |x - x_0| \leqslant \frac{a}{2}, \ |y - y_0| \leqslant \frac{b}{2}. \quad (5)$$

Возьмем в этой области любую точку $(x_0, \bar{y}_0)$ и построим область

$$\bar{R}_{\frac{1}{2}}: \ |x - x_0| \leqslant \frac{a}{2}, \ |y - \bar{y}_0| \leqslant \frac{b}{2}. \quad (6)$$

---

* См., например: Матвеев, пп. **134**, **135**; Степанов, стр. 298—307.

Так как $\overline{R}_{\frac{1}{2}}$ лежит внутри R, то существует единственное решение

$$y = \varphi(x, x_0, \bar{y}_0), \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = \bar{y}_0 \text{ при } x = x_0. \tag{8}$$

Теорема. *При сделанных предположениях формула* (7), *где* $\bar{y}_0$ *рассматривается как произвольная постоянная, подчиненная условию*

$$|\bar{y}_0 - y_0| \leqslant \frac{b}{2}, \tag{9}$$

дает общее решение уравнения (1) *в области*

$$D: \quad |x - x_0| \leqslant \frac{h}{4}, \ |y - y_0| \leqslant \frac{b}{4}, \tag{10}$$

содержащей внутри себя точку (x_0, y_0).

В самом деле, утверждение теоремы означает, что функция (7) непрерывно дифференцируема относительно x и что она удовлетворяет двум условиям: 1) равенство (7) разрешимо в области D относительно произвольной постоянной $\bar{y}_0$; 2) функция (7) является решением уравнения (1) при соответствующих значениях $\bar{y}_0$.

Нам нужно проверить только выполнение первого условия.

Возьмем любую точку (x^*, y^*) из области D и подставим ее в (7). Получим:

$$y^* = \varphi(x^*, x_0, \bar{y}_0). \tag{11}$$

Нужно доказать, что это уравнение разрешимо относительно $\bar{y}_0$.

Для этого построим область

$$R^*_{\frac{1}{4}}: \ |x - x^*| \leqslant \frac{a}{4}, \ |y - y^*| \leqslant \frac{b}{4}. \tag{12}$$

Она содержится в области $R_{\frac{1}{2}}$. Поэтому уравнение (1) имеет единственное решение

$$y = \varphi(x, x^*, y^*), \tag{13}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y^* \text{ при } x = x^*. \tag{14}$$

Это решение определено в интервале

$$|x - x^*| \leqslant \frac{h}{4} \tag{15}$$

и не выходит при этих значениях x из области $R^*_{\frac{1}{4}}$.

Так как x_0 удовлетворяет неравенству

$$|x_0 - x^*| \leqslant \frac{h}{4} \tag{16}$$

[ведь $(x^*, y^*) \in D$!], то решение (13) определено и в точке $x = x_0$. Обозначим значение этого решения в точке $x = x_0$ через $\bar{y}_0$:

$$\bar{y}_0 = \varphi(x_0, x^*, y^*). \tag{17}$$

Точка $(x_0, \bar{y}_0)$ принадлежит области $R^*_{\frac{1}{4}}$ и тем самым области $R_{\frac{1}{2}}$.

Построим теперь решение (7) именно с такими начальными данными x_0 и $\bar{y}_0$. Так как решение (13) тоже удовлетворяет условиям (8) [ведь оно проходит через точку $(x_0, \bar{y}_0)$!], то решения (7) и (13) совпадают, и, следовательно, решение (7) проходит через точку (x^*, y^*), т. е.

$$y^* = \varphi(x^*, x_0, \bar{y}_0). \tag{18}$$

Таким образом, уравнение (7), как показывают равенства (18) и (17), разрешимо относительно $\bar{y}_0$.

Следовательно, (7) есть общее решение уравнения (1) в области D.

Из доказанной теоремы следует, что *уравнение* (1) *при условиях теоремы Пикара имеет интеграл, определенный в окрестности начальной точки* (x_0, y_0).

Действительно, разрешая общее решение (7) в области D относительно $\bar{y}_0$, имеем:

$$\bar{y}_0 = \varphi(x_0, x, y). \tag{19}$$

Функция $\varphi(x_0, x, y)$ и является и н т е г р а л о м уравнения (1).

Если предположить дополнительно, что правая часть уравнения (1) имеет непрерывную частную производную по y, то интеграл $\varphi(x_0, x, y)$ будет иметь непрерывные частные производные по x и y, ибо тогда решение (7) будет иметь непрерывные частные производные по начальным данным x_0, $\bar{y}_0$.

12. Теорема существования общего решения, доказанная выше для одного уравнения, распространяется на нормальную систему n-го порядка и, следовательно, на уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.

Пусть дана нормальная система

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Предположим, что правые части этой системы удовлетворяют условиям теоремы Пикара в параллелепипеде

$$R:\quad |x-x_0|\leqslant a_0,\ \left|y_k-y_k^{(0)}\right|\leqslant b\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{21}$$

Тогда она имеет единственное решение

$$y_k=\varphi_k\left(x,\ x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{22}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1=y_1^{(0)},\ y_2=y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n=y_n^{(0)}\quad \text{при } x=x_0. \tag{23}$$

Теорема. *Совокупность n функций*

$$y_k=\varphi_k\left(x,\ x_0,\ \overline{y}_1^{(0)},\ \overline{y}_2^{(0)},\ \ldots,\ \overline{y}_n^{(0)}\right), \tag{24}$$

где величины $\overline{y}_k^{(0)}$ рассматриваются как произвольные постоянные, подчиненные условиям

$$\left|\overline{y}_k^{(0)}-y_k^{(0)}\right|\leqslant\frac{b}{2}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{25}$$

дает общее решение системы (20) *в области*

$$D:\quad |x-x_0|\leqslant\frac{h}{4},\ \left|y_k-\overline{y}_k^{(0)}\right|\leqslant\frac{b}{4}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{26}$$

содержащей внутри себя точку $\left(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)$.

Из этой теоремы следует, что *нормальная система* (20) *имеет n независимых интегралов, определенных в окрестности начальной точки* $\left(x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(0)}\right)$.

Действительно, разрешая (24) относительно

$$\overline{y}_k^{(0)}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

имеем:

$$\overline{y}_k^{(0)}=\varphi_k(x_0,\ x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{27}$$

Функции $\varphi_k(x_0,\ x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ и образуют совокупность n независимых интегралов системы (20).

Если предположить дополнительно, что правые части системы (20) имеют непрерывные частные производные по y_1, y_2, …, y_n, то эти интегралы будут непрерывно дифференцируемы относительно x, y_1, y_2, …, y_n (почему?).

§ 4. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

13. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \tag{1}$$

Всякую точку (x_0, y_0), в которой правая часть уравнения (1) определена и в некоторой окрестности которой выполнены оба условия теоремы Пикара для самого уравнения (1) или для перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{1'}$$

будем называть *обыкновенной точкой* дифференциального уравнения (1). Всякую другую точку будем называть *особой*.

Через обыкновенную точку (x_0, y_0) проходит одно, и только одно, решение $y = y(x)$ уравнения (1) или решение $x = \psi(y)$ уравнения (1').

Если точка (x_0, y_0) особая, то в общем случае нельзя гарантировать даже существование решений с начальными данными x_0, y_0, не говоря уже о единственности.

Вопрос о расположении особых точек и поведении интегральных кривых в окрестности особых точек есть один из основных вопросов *качественной теории дифференциальных уравнений*, в которой изучается геометрическая картина интегральных кривых, независимо от возможности проинтегрировать уравнение в конечном виде.

Обычно изучают так называемые *изолированные особые точки*, т. е. особые точки, в достаточно малой окрестности которых нет других особых точек.

Наиболее важным типом особых точек является *точка неопределенности типа* $\frac{0}{0}$. Это такая точка (x_0, y_0), в которой правая часть уравнения (1) обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Например, для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \tag{2}$$

всякая точка (x_0, y_0), в которой X и Y одновременно обращаются в нуль, будет особой точкой такого типа.

В частности, уравнение с однородной дробно-линейной правой частью

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \tag{3}$$

где a, b, c и d — постоянные вещественные числа, причем $ad - bc \neq 0$, имеет единственную изолированную особую точку типа $\frac{0}{0}$. Этой точкой будет начало координат $x = 0$, $y = 0$.

14. Для нормальной системы n-го порядка

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

понятия обыкновенной и особой точек вводятся аналогично случаю одного уравнения (1). Кроме того, для автономной системы

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где t — время, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки в фазовом пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, представляет интерес рассмотрение точек, в которых правые части этой системы одновременно обращаются в нуль. Такие точки называются точками *равновесия (покоя) системы* (5). Исследование поведения траекторий системы (5) в окрестности точек равновесия является одной из основных задач *качественной теории дифференциальных уравнений*. При этом обычно предполагают, что в окрестности точки равновесия выполняются условия теоремы Пикара (или другой теоремы существования и единственности), и точку равновесия называют *особой точкой* системы (5).

Например, для системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned}\right\} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{6}$$

единственной точкой равновесия является точка $x = 0$, $y = 0$. Заметим, что она является особой точкой уравнения (3), соответствующего системе (6). Точку $x = 0$, $y = 0$ называют в качественной теории дифференциальных уравнений *особой точкой* системы (6).

15. Рассмотрим уравнение (3),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad (ad - bc \neq 0).$$

Исследуем вопрос о возможном поведении интегральных кривых уравнения (3) в окрестности особой точки $x = 0$, $y = 0$ в зависимости от коэффициентов a, b, c и d.

Для этого уравнение (3) при помощи *неособенного линейного преобразования*

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \gamma x + \delta y, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где α, β, γ и δ — вещественные числа, причем $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, приводят к некоторым *простейшим формам*. Вид этих форм зависит от характера корней уравнения

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & d \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для уравнения (3), а его корни — *характеристическими числами* уравнения (3).

А. Пуанкаре показал, что возможны следующие случаи, каждому из которых отвечает свое расположение интегральных кривых в окрестности особой точки.

Если корни характеристического уравнения λ_1 *и* λ_2 *различны, то уравнение* (3) *приводится к виду*

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}. \tag{9}$$

При этом различают четыре случая.

I. λ_1 и λ_2 — вещественны и одного знака. Пусть $\lambda_1>\lambda_2>0$. Тогда интегральными кривыми уравнения (9) будут

$$\left.\begin{aligned} &\eta=C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (\xi\neq 0),\\ &\xi=0 \quad (\eta\neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Все они примыкают к особой точке $\xi=0$, $\eta=0$, причем интегральные кривые

$$\eta=C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (\xi\neq 0) \tag{11}$$

примыкают к точке $\xi=0$, $\eta=0$, касаясь в ней оси $O\xi$, ибо

$$\eta'_\xi\to 0 \text{ при } \xi\to 0 \tag{12}$$

(почему?). Полуоси оси $O\eta$: $\xi=0$ $(\eta\neq 0)$ примыкают к особой точке $\xi=0$, $\eta=0$ со своим направлением касательной. Особая точка $\xi=0$, $\eta=0$ такого типа называется *узлом* (рис. 44). Так как в окрестности особой точки $x=0$, $y=0$ уравнения (3) вследствие неособенности линейного преобразования (7) мы будем иметь ту же качественную картину расположения интегральных кривых, то эта особая точка называется также *узлом*.

II. λ_1 и λ_2 — вещественны и противоположных знаков. Тогда к особой точке $\xi=0, \eta=0$ примыкает только конечное число интегральных кривых, а именно четыре:

$$\left.\begin{aligned} &\eta=0 \quad (\xi\neq 0),\\ &\xi=0 \quad (\eta\neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Всякая другая интегральная кривая обладает тем свойством, что при $\xi\to 0$ точка (ξ, η), лежащая на ней, сначала приближается к особой точке $\xi=0$, $\eta=0$, а затем начинает удаляться от нее. Особая точка $\xi=0$, $\eta=0$ такого типа называется *седлом* (рис. 45). В этом случае особая точка $x=0$, $y=0$ также называется *седлом*.

III. λ_1 и λ_2 — комплексные: $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$. Тогда уравнение (9) будет комплексным

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{(p+iq)\eta}{(p-iq)\xi}. \tag{14}$$

Коэффициенты преобразования (7) можно выбрать так, что оно примет вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y, \\ \eta &= \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

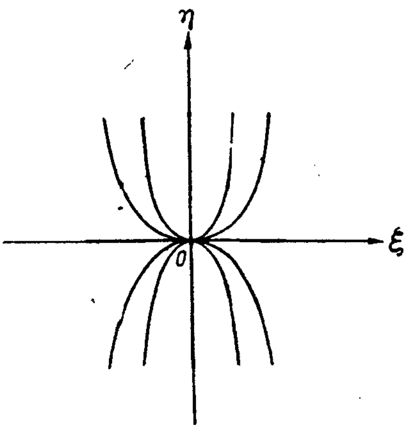

Рис. 44.

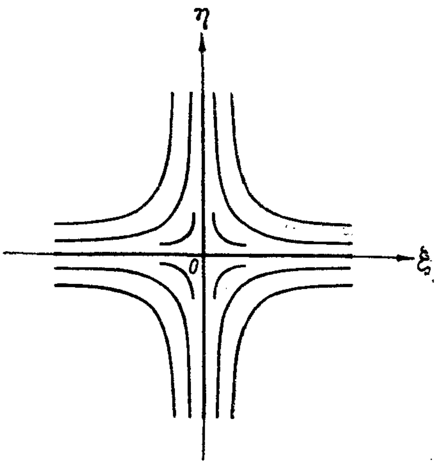

Рис. 45.

где $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — комплексные числа, сопряженные числам α и β (почему?). Тогда $\eta = \bar{\xi}$. Полагая

$$\left.\begin{aligned} \xi &= u + iv, \\ \eta &= u - iv, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где u и v — вещественные переменные, получим:

$$\frac{dv}{du} = \frac{pv - qu}{pu + qv} \tag{17}$$

(почему?). Интегрируя последнее, находим:

$$\sqrt{u^2 + v^2} = Ce^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}}. \tag{18}$$

Переходя к полярным координатам по формулам

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \tag{19}$$

получаем:

$$r = Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}. \tag{20}$$

Это — логарифмические спирали на плоскости (u, v). В этом случае все интегральные кривые уравнения (17) примыкают к особой точке $u=0$, $v=0$ при $\varphi \to +\infty$, если $pq > 0$, и при $\varphi \to -\infty$, если $pq < 0$, но не имеют в ней определенного направления (рис. 46). Все интегральные кривые обходят бесконечное число раз особую точку $u=0$, $v=0$ в одном и том же направлении, асимптотически приближаясь к ней. Та же качественная картина будет иметь место и в окрестности точки $x=0$, $y=0$. Особая точка такого типа называется *фокусом*.

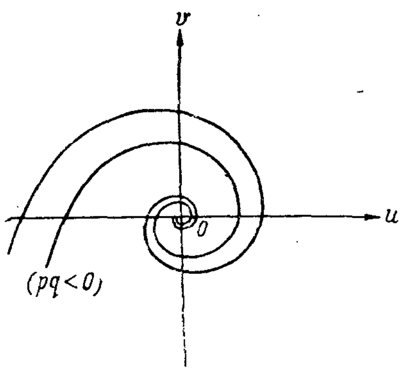

Рис. 46.

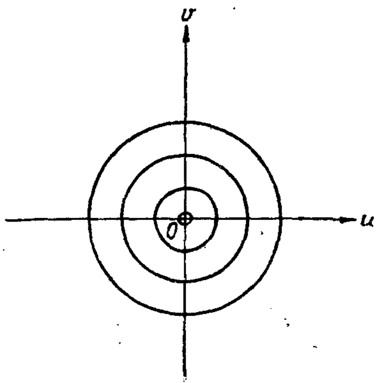

Рис. 47.

IV. λ_1 и λ_2 — чисто мнимые: $\lambda_1 = iq$, $\lambda_2 = -iq$. Здесь вместо уравнения (17) получим

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}. \tag{21}$$

Интегральными кривыми будут окружности

$$u^2 + v^2 = C^2 \tag{22}$$

с центром в особой точке $u=0$, $v=0$ (рис. 47), а интегральными кривыми уравнения (3) — эллипсы с центром в точке $x=0$, $y=0$. В этом случае особая точка называется *центром*.

Если корни характеристического уравнения кратные, то уравнение (3), *вообще говоря, не приводится к виду* (9). Различают два случая.

1. Уравнение (3) при помощи подстановки

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ax + \frac{b-c}{2}y, \\ \eta &= y \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

приводится к уравнению вида

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\lambda_1\eta}{\lambda_1\xi}, \tag{24}$$

где $\lambda_1=\lambda_2=\frac{b+c}{2}$. Интегральными кривыми будут

$$\left.\begin{aligned} &\eta=\xi\left(C+\frac{1}{\lambda_1}\ln|\xi|\right) \quad (\xi\neq 0),\\ &\xi=0 \quad (\eta\neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

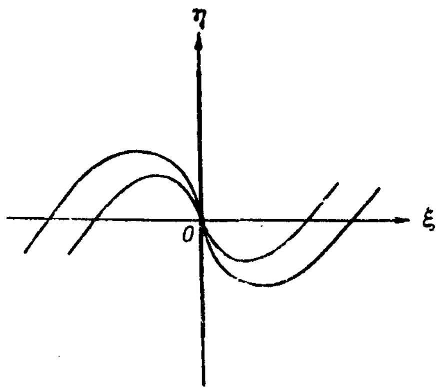

Рис. 48.

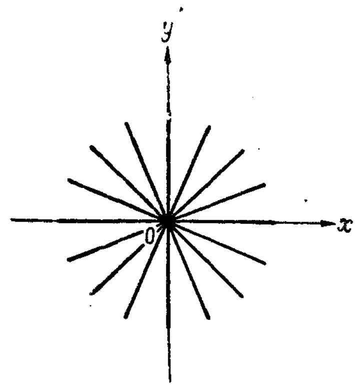

Рис. 49.

Все они примыкают к особой точке $\xi=0$, $\eta=0$, касаясь в ней оси $O\eta$ (рис. 48) (почему?), так что все интегральные кривые примыкают к особой точке с одним и тем же направлением касательной. Особая точка такого типа называется *вырожденным узлом*.

2. Уравнение (3) имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}. \tag{26}$$

Интегральными кривыми будут:

$$\left.\begin{aligned} &y=Cx \quad (x\neq 0),\\ &x=0 \quad (y\neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Все они примыкают к особой точке $x=0$, $y=0$, причем каждая из них имеет свое направление касательной в этой точке (рис. 49). Особая точка такого типа называется *дикритическим узлом*.

Для автономной системы (6), соответствующей уравнению (3), точка равновесия (покоя) $x=0$, $y=0$ называется *узлом, седлом, фокусом* или *центром*, если для уравнения (3) точка

$x=0$, $y=0$ является соответственно узлом, седлом, фокусом или центром. При этом точка равновесия системы (6) называется *устойчивой* или *неустойчивой* в зависимости от того, будет нулевое решение системы (6) устойчивым или нет. Центр всегда является устойчивой особой точкой (но не асимптотически), седло — неустойчиво, а узел и фокус либо асимптотически устойчивы, либо абсолютно неустойчивы (почему?).

Пример. Определить тип особой точки $x=0$, $y=0$ для уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-y}. \tag{28}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{29}$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2}=\pm i$. Особая точка $x=0$, $y=0$ есть центр. Для соответствующей автономной системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=x-y, \\ \frac{dy}{dt}&=2x-y \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

начало координат будет точкой равновесия типа центр.

16. Вопрос о типе особой точки $x=0$, $y=0$ для уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+\varphi(x, y)}{cx+dy+\psi(x, y)}, \tag{31}$$

где $\varphi(0, 0)=\psi(0, 0)=0$, в некоторых случаях может решаться по *укороченному уравнению* (3):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}.$$

Оказывается, что *если φ и ψ имеют непрерывные частные производные в окрестности точки $x=0$, $y=0$, и*

$$\lim_{|x|+|y|\to 0}\frac{|\varphi'_x|+|\varphi'_y|+|\psi'_x|+|\psi'_y|}{(|x|+|y|)^{\alpha}}=0 \quad (\alpha>0), \tag{32}$$

то точка $x=0$, $y=0$ будет для уравнения (31) *особой точкой того же типа, что и для уравнения* (3), *если только для последнего уравнения она не является центром.*

Если же для укороченного уравнения (3) *особая точка $x=0$, $y=0$ является центром, то для полного уравнения* (31) *она не обязательно будет центром.*

Пуанкаре и Ляпунов показали, что *для уравнения*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x+Q(x,\ y)}{y+P(x,\ y)},\tag{33}$$

где P и Q — полиномы, не содержащие свободных и линейных членов, или функции, разложения которых в ряды по степеням x и y начинаются членами не ниже второго измерения, особая точка $x=0$, $y=0$ может быть (в зависимости от выбора P и Q) как центром, так и фокусом, в то время как для укороченного уравнения

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\tag{34}$$

точка $x=0$, $y=0$ будет особой точкой типа центр.

В связи с этим возникает проблема установления аналитического критерия для отличия центра от фокуса. Эта проблема называется *проблемой центра и фокуса.*

§ 5. ТЕОРЕМА КОШИ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

17. Решение задачи Коши, доставляемое теоремой Пикара, непрерывно и дифференцируемо в окрестности $|x-x_0|\leqslant h$ начального значения x_0 независимой переменной x. В этом параграфе будет (при дополнительном условии) доказано существование решения задачи Коши, представимого в некоторой окрестности $|x-x_0|<\rho$ точки $x=x_0$ в виде степенного ряда по степеням разности $x-x_0$. Такое решение называется *голоморфным в указанной области.*

Вообще функция $f(x)$ называется *голоморфной в окрестности $|x-x_0|<\rho$ точки $x=x_0$*, если она представима в этой окрестности степенным рядом по степеням разности $x-x_0$, т. е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,\tag{1}$$

где ряд справа сходится при $|x-x_0|<\rho$.

Аналогично определяется голоморфная функция n независимых переменных. Функция $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ называется *голоморфной функцией в окрестности*

$$|x_1-x_1^{(0)}|<\rho_1,\quad |x_2-x_2^{(0)}|<\rho_2,\ \ldots,\ |x_n-x_n^{(0)}|<\rho_n\tag{2}$$

точки $x_1=x_1^{(0)}$, $x_2=x_2^{(0)}$, ..., $x_n=x_n^{(0)}$, если

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=\sum_{m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n=0}^{\infty}a_{m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n}(x_1-x_1^{(0)})^{m_1}\times$$
$$\times(x_2-x_2^{(0)})^{m_2}\ldots(x_n-x_n^{(0)})^{m_n},\tag{3}$$

где ряд справа сходится в области (2).

Пример 1. Функции $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$ голоморфны в окрестности $|x| < 1$ точки $x=0$, ибо для них имеют место известные разложения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \\ &\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \\ &(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем ряды справа сходятся при $|x| < 1$.

Пример 2. Функция $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$ является голоморфной функцией в окрестности $|x| < 1$, $|y| < 1$ точки $x=0$, $y=0$, ибо

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} y^m = \sum_{k,\,m=0}^{\infty} x^k y^m, \tag{5}$$

причем ряд справа сходится в области $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Функция $f(x)$ называется *целой*, если она голоморфна в окрестности $|x - x_0| < +\infty$ любой точки $x = x_0$, т. е. $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \tag{6}$$

причем за x_0 можно взять любое число, и ряд справа сходится при всех x.

Пример 3. Полином от x является, очевидно, целой функцией от x. Функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ также являются целыми, ибо они разлагаются в ряды по степеням $x - x_0$ (x_0 — любое число), сходящиеся при всех значениях x. В частности, при $x_0 = 0$ имеем разложения:

$$\left.\begin{aligned} &e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \\ &\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \\ &\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

причем ряды справа сходятся при всех x.

Для всякой голоморфной функции существует так называемая *мажоранта*, т. е. функция, представимая степенным рядом с положительными коэффициентами, превосходящими абсолютные величины коэффициентов разложения данной функции. Пусть $f(x)$ голоморфна в окрестности $|x| < \rho$ точки $x = 0$, т. е. имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < \rho. \tag{8}$$

Тогда ее мажоранта имеет вид

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k, \tag{9}$$

где $A_k>0$ и

$$|a_k| \leqslant A_k, \tag{10}$$

причем ряд справа в (9) сходится в некоторой окрестности точки $x=0$.

В качестве мажоранты всегда можно взять

$$F_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, x^k \tag{11}$$

(почему?). Но существует и более удобная для приложений мажоранта в виде элементарной функции. Чтобы построить такую мажоранту, возьмем число ρ', $0<\rho'<\rho$, и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, \rho'^n. \tag{12}$$

Этот ряд сходится (почему?). Обозначив его сумму через M:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, \rho'^k = M, \tag{13}$$

будем иметь

$$|a_k|\, \rho'^k \leqslant M, \tag{14}$$

откуда

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{\rho'^k} = A_k. \tag{15}$$

Построим ряд с коэффициентами A_k:

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^k} x^k. \tag{16}$$

Этот ряд имеет положительные коэффициенты. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\rho'^k} x^k = M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho'}\right)^k = \frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}} \quad \text{при } |x|<\rho', \tag{17}$$

то ряд (16) сходится при $|x|<\rho'$, и в силу (15) его сумма

$$\Phi(x)=\frac{M}{1-\frac{x}{\rho'}} \tag{18}$$

является мажорантой для $f(x)$.

Элементарной мажорантой для функции нескольких переменных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n} a_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \tag{19}$$

где ряд справа сходится в области

$$|x_1| < \rho_1, \; |x_2| < \rho_2, \; \ldots, \; |x_n| < \rho_n, \tag{20}$$

например, будет

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{\rho_1'}\right)\left(1 - \frac{x_2}{\rho_2'}\right) \ldots \left(1 - \frac{x_n}{\rho_n'}\right)}, \tag{21}$$

где $|x_k| < \rho_k'$, причем $0 < \rho_k' < \rho_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а M — сумма ряда

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 0}^{\infty} |a_{m_1 m_2, \ldots, m_n}| \rho_1'^{m_1} \rho_2'^{m_2} \ldots \rho_n'^{m_n}. \tag{22}$$

18. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{23}$$

и поставлены начальные условия

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \tag{24}$$

Теорема Коши. *Если правая часть уравнения* (23) *голоморфна в окрестности начальной точки* (x_0, y_0), *а именно*

$$f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n, \tag{25}$$

причем ряд справа сходится в области

$$|x - x_0| < \rho, \; |y - y_0| < r, \tag{26}$$

то существует единственное решение

$$y = y(x) \tag{27}$$

уравнения (23), *удовлетворяющее начальным условиям* (24), *и голоморфное в окрестности начального значения независимой переменной, т. е. решение* (27) *представимо в виде*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{28}$$

где ряд справа сходится в области

$$|x-x_0|<\rho_1<\rho,\ \rho_1=\rho'\left(1-e^{-\frac{r'}{2\rho' M}}\right), \tag{29}$$

причем $0<\rho'<\rho$, $0<r'<r$, *а* M — *некоторое положительное число.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что существование и единственность решения задачи Коши (23)—(24) следует уже из теоремы Пикара, оба условия которой при выполнении условия теоремы Коши заведомо выполнены (почему?). Кроме того, решение (27) имеет непрерывную производную любого порядка (почему?). Оказывается, что при сделанном предположении относительно голоморфности правой части уравнения (23) решение задачи Коши (23) — (24) не только имеет непрерывную производную любого порядка, но и голоморфно в некоторой окрестности начального значения независимой переменной. В этом состоит основное содержание теоремы Коши.

Прежде чем излагать доказательство теоремы Коши, сделаем одно упрощение, а именно, будем считать начальные данные нулевыми: $x_0=0$, $y_0=0$, что, конечно, не умаляет общности, ибо этого всегда можно добиться очевидной заменой переменных

$$\xi=x-x_0,\ \eta=y-y_0. \tag{30}$$

Итак, пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{31}$$

и поставлены начальные условия

$$y=0 \text{ при } x=0. \tag{32}$$

Докажем, что если

$$f(x,\ y)=\sum_{m,\ n=0}^{\infty} a_{mn}x^m y^n, \tag{33}$$

причем ряд справа сходится в области

$$|x|<\rho,\ |y|<r, \tag{34}$$

то уравнение (31) имеет единственное решение

$$y=y(x) \tag{35}$$

с начальными условиями (32), и это решение представимо в окрестности точки $x=0$ в виде

$$y=\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k, \tag{36}$$

где ряд справа сходится в области

$$|x|<\rho_1<\rho. \tag{37}$$

Разобьем доказательство на две части. Сначала докажем существование формального решения вида (36), т. е. покажем, что коэффициенты c_k можно определить (и притом единственным образом) так, что ряд (36) формально удовлетворяет уравнению (31), т. е. обращает его в тождество, если считать, что операции почленного дифференцирования ряда (36) и подстановки его в ряд (33), которые при этом придется выполнять, законны. Затем докажем, что ряд (36) сходится, а тогда его можно почленно дифференцировать и подставлять в уравнение (31), и, следовательно, он является не только формальным, но и истинным решением уравнения (31).

1. Найдем формальное решение вида (36) *методом неопределенных коэффициентов,* т. е. подставляя ряд (36) в уравнение (31) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства.

Подставляя ряд (36) в уравнение (31) и заменяя при этом правую часть разложением (33), получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}=\sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{mn} x^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right)^n. \tag{38}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, расположив правую часть в виде ряда по степеням x.

Свободные члены получаются слева при $k=1$, а справа при $m=n=0$. Приравнивая их, имеем:

$$1\cdot c_1=a_{00}. \tag{39}$$

Чтобы найти коэффициенты при первой степени x, нужно положить слева $k=2$. В правой части получим два члена, содержащие x в первой степени: при $m=1$, $n=0$, что дает $a_{10}x$, и при $m=0$, $n=1$, если в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ удержать член, содержащий первую степень x, в результате чего получим $a_{01}c_1x$. Поэтому, приравнивая в (38) коэффициенты при первой степени x, получим

$$2\cdot c_2=a_{10}+a_{01}c_1. \tag{40}$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, будем иметь:

$$3\cdot c_3 = a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2 + a_{01}c_2 \tag{41}$$

и т. д.

Приравнивая коэффициенты при x^{k-1}, получим

$$k\cdot c_k = P_{k-1}(a_{\lambda\mu},\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{k-1}). \tag{42}$$

Здесь P_{k-1} есть полином относительно своих аргументов, т. е. относительно некоторых коэффициентов разложения правой части уравнения (31) и относительно $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$, причем коэффициенты этого полинома суть целые положительные числа, ибо, собирая в правой части равенства (38) коэффициенты при одной и той же степени x, приходится выполнять только операции сложения, умножения и возведения в степень. Например, оба коэффициента полинома $P_1 = a_{10} + a_{01}c_1$ равны единице.

Из равенства (42) находим

$$c_k = \frac{P_{k-1}}{k}. \tag{43}$$

Так как c_1 уже найден, $c_1 = a_{00}$, то, пользуясь формулой (43), определим последовательно все другие коэффициенты ряда (36). Получим:

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= \frac{P_1}{2} = \frac{a_{10} + a_{01}c_1}{2} = \frac{a_{10} + a_{01}a_{00}}{2}, \\ c_3 &= \frac{P_2}{3} = \frac{1}{3}\left[a_{20} + a_{11}a_{00} + a_{02}a_{00}^2 + a_{01}\,\frac{a_{10} + a_{01}a_{00}}{2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

и т. д.

$$c_k = R_k(a_{\lambda\mu}), \tag{45}$$

где R_k есть полином от своих аргументов с положительными коэффициентами.

Таким образом, все коэффициенты ряда (36) определяются единственным образом, и, следовательно, уравнение (31) может иметь только одно голоморфное решение с заданными начальными данными. (Впрочем, это следует уже из единственности решения задачи Коши, обеспеченной теоремой Пикара.)

2. Докажем теперь сходимость ряда (36).

Для этого построим заведомо сходящийся ряд, который был бы мажорантным для ряда (36). С этой целью возьмем мажоранту для правой части данного уравнения (31) в виде

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{y}{r'}\right)}\left(|x|<\rho',\ |y|<r';\quad 0<\rho'<\rho,\quad 0<r'<r;\right.$$

$$\left. M=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}|a_{mn}|\rho'^m r'^n\right) \tag{46}$$

и построим вспомогательное уравнение

$$\frac{dY}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{Y}{r'}\right)}, \tag{47}$$

которое называется *мажорантным уравнением* для уравнения (31). Правая часть уравнения (47) голоморфна в окрестности $|x|<\rho'$, $|Y|<r'$ точки $x=0$, $Y=0$. Ее разложение по степеням x и Y имеет вид

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\left(1-\frac{Y}{r'}\right)}=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}M\left(\frac{x}{\rho'}\right)^m\left(\frac{Y}{r'}\right)^n=$$

$$=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{M}{\rho'^m r'^n}x^m Y^n\,(|x|<\rho',\ |Y|<r'), \tag{48}$$

причем

$$|a_{mn}|\leqslant\frac{M}{\rho'^m r'^n}=A_{mn}. \tag{49}$$

Будем искать решение мажорантного уравнения (47) с теми же начальными условиями, что и искомое решение данного уравнения (31), т. е:

$$Y=0 \text{ при } x=0. \tag{50}$$

Такое решение существует и единственно (почему?). Найдем его.

Интегрируя уравнение (47), имеем:

$$-\frac{r'}{2}\left(1-\frac{Y}{r'}\right)^2=-M\rho'\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)+C. \tag{51}$$

Полагая $x=0$, $Y=0$, найдем: $C=-\frac{r'}{2}$. Подставляя это значение C в (51) и умножая обе части на $-\frac{2}{r'}$, получим:

$$\left(1-\frac{Y}{r'}\right)^2=\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)+1. \tag{52}$$

Разрешая это уравнение относительно Y, имеем:

$$1-\frac{Y}{r'}=\pm\sqrt{1+\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)}. \tag{53}$$

Из двух знаков перед корнем мы можем, в силу начальных условий (50), взять только знак плюс. Выбрав этот знак, получим искомое решение уравнения (47) в виде

$$Y=r'\left(1-\sqrt{1+\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)}\right). \tag{54}$$

Покажем, что это решение голоморфно в некоторой окрестности точки $x=0$. Действительно, положим

$$\alpha=\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right). \tag{55}$$

Функция $\sqrt{1+\alpha}$, будучи равной $(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}$, разлагается в биномиальный ряд по степеням α, сходящийся при $|\alpha|<1$. В свою очередь α разлагается в ряд по степеням x, сходящийся при $|x|<\rho'$, так как $\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)$ разлагается в логарифмический ряд по степеням $-\frac{x}{\rho'}$, сходящийся при $\left|-\frac{x}{\rho'}\right|<1$. Следовательно, решение (54) разложимо в ряд по степеням x

$$Y=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{c}_k x^k, \tag{56}$$

который будет сходиться при всех значениях x, для которых выполняются одновременно оба неравенства

$$|x|<\rho',\quad \left|\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)\right|<1. \tag{57}$$

Определим область сходимости ряда (56). При этом мы можем ограничиться рассмотрением только положительных значений x, удовлетворяющих неравенствам (57), ибо если известно, что ряд по степеням x сходится при $x=x_0\neq 0$, то он абсолютно сходится и при всяком значении x, удовлетворяющем неравенству $|x|<|x_0|$.

Итак, будем считать, что $0<x<\rho'$. Тогда второе из неравенств (57) примет вид

$$-\frac{2M\rho'}{r'}\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)<1 \tag{58}$$

(почему?). Решая его относительно x, имеем:

$$\ln\left(1-\frac{x}{\rho'}\right)>-\frac{r'}{2M\rho'},\quad 1-\frac{x}{\rho'}>e^{-\frac{r'}{2M\rho'}},\tag{59}$$

откуда

$$0<x<\rho'\left(1-e^{-\frac{r'}{2M\rho'}}\right).\tag{60}$$

Следовательно, ряд (56) сходится при

$$|x|<\rho'\left(1-e^{-\frac{r'}{2M\rho'}}\right)\equiv\rho_1.\tag{61}$$

Докажем, что этот ряд является мажорантным для ряда (36). В самом деле, мы могли бы находить коэффициенты $\bar{c}_k$ ряда (56) методом неопределенных коэффициентов, подставляя (56) в (47). При этом мы получили бы, что

$$\bar{c}_k=R_k(A_{\lambda\mu}),\tag{62}$$

где R_k тот же полином, что и в (45), а $A_{\lambda\mu}$ коэффициенты разложения правой части мажорантного уравнения (47).

Сравнивая формулы (45) и (62), видим, что

$$|c_k|\leqslant\bar{c}_k.\tag{63}$$

В самом деле, так как функции R_k есть полиномы с положительными коэффициентами от своих аргументов, то коэффициенты $\bar{c}_k$ положительны и в силу неравенств (49) превосходят абсолютные величины коэффициентов c_k. Из неравенств (63) следует, что *ряд* (56) *является мажорантным рядом для ряда* (36).

Поэтому ряд (36) сходится по крайней мере в области (61).

Изложенный выше метод доказательства сходимости ряда (36) при помощи построения мажорантного ряда (56) принадлежит Коши и называется *методом мажорантных рядов*. Для построения мажорантного ряда использовано мажорантное дифференциальное уравнение. При этом мажоранта выбрана таким образом, что мажорантное дифференциальное уравнение интегрируется в элементарных функциях и имеет решение, удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и искомое решение и голоморфное в окрестности начального значения независимой переменной. Это решение и является мажорантой для искомого решения.

В первой части доказательства при построении формального решения (36) мы находили коэффициенты c_k методом неопределенных коэффициентов. На практике вычисления, связанные с этим методом, могут представить затруднения.

Укажем другой метод нахождения коэффициентов c_k, основанный на представлении искомого решения в виде ряда Тэйлора.

Так как решение (35) разлагается в степенной ряд (36), а всякий степенной ряд (внутри промежутка сходимости) есть ряд Тэйлора для его суммы, то мы можем записать это решение в виде ряда Тэйлора:

$$y = y(0) + y'(0)\, x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k + \ldots, \tag{64}$$

где, в силу начальных условий (32), имеем $y(0) = 0$.

Выразим $y'(0)$, $y''(0)$, ... через значения правой части уравнения (31) и ее производные в начальной точке $x = 0$, $y = 0$.

Подставляя решение (64) в уравнение (31), имеем тождество

$$y'(x) \equiv f[x, y(x)]. \tag{65}$$

Полагая здесь $x = 0$ и принимая во внимание, что $y(0) = 0$, получим

$$y'(0) = f(0, 0). \tag{66}$$

Продифференцируем обе части уравнения (31) по x, считая, что y есть решение (64). Получим:

$$y'' = f'_x + f'_y \cdot y', \tag{67}$$

откуда

$$y''(0) = f'_x(0, 0) + f'_y(0, 0) f(0, 0). \tag{68}$$

Продолжая этот процесс, найдем все коэффициенты ряда (64).

Решение (27) уравнения (23) с начальными условиями (24) можно записать в виде

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots \tag{69}$$

Здесь $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а значения остальных производных в точке $x = x_0$ находятся, как и выше, при помощи последовательного дифференцирования обеих частей уравнения (23).

Указанный метод нахождения коэффициентов c_k не требует выполнения фактического разложения правой части уравнения (23) в степенной ряд и особенно удобен, если требуется найти только несколько первых членов искомого решения.

Пример 1. Найти четыре первых члена разложения решения уравнения

$$y' = x^2 + y^2 \tag{70}$$

с начальными условиями

$$y = 0 \text{ при } x = 0 \tag{71}$$

в ряд по степеням x.

Имеем:

$$y = y'(0)\,x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots \tag{72}$$

Из уравнения (70) находим $y'(0) = 0$. Дифференцируя обе части уравнения (70), получим:

$$\left.\begin{aligned} y'' &= 2x + 2y\cdot y', \\ y''' &= 2 + 2y'^2 + 2y\cdot y'', \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

откуда $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 2$. Поэтому

$$y \approx \frac{2}{3!}x^3. \tag{74}$$

Пример 2. Найти первые три члена разложения решения уравнения

$$y' = x^2 - y^2 \tag{75}$$

с начальными условиями

$$y = 2 \quad \text{при} \quad x = 1 \tag{76}$$

в ряд по степеням $(x-1)$.

Имеем:

$$y = 2 + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + \ldots \tag{77}$$

Из уравнения (75) находим: $y'(1) = -3$, $y'' = 2x - 2y\cdot y'$, $y''(1) = 14$. Следовательно,

$$y \approx 2 - 3(x-1) + 7(x-1)^2. \tag{78}$$

Интервал голоморфности решения, доставляемого теоремой Коши, в общем случае меньше интервала сходимости правой части уравнения относительно независимой переменной $(\rho_1 < \rho)$. Это может иметь место даже в тех случаях, когда правая часть уравнения (23) есть ц е л а я функция относительно x и y.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$y' = y^2 \tag{79}$$

и поставим начальные условия

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{80}$$

Здесь правая часть, очевидно, голоморфна относительно x и y в любой окрестности начальной точки $x = 0$, $y = 1$. Искомым решением будет

$$y = \frac{1}{1-x}. \tag{81}$$

Так как

$$y = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{при} \quad |x| < 1, \tag{82}$$

то решение (81) голоморфно лишь в окрестности $|x| < 1$ точки $x = 0$.

Заметим, что решение (81) определено и непрерывно дифференцируемо в более широкой области, а именно в интервале $(-\infty, 1)$. Но оно представимо степенным рядом (82) (т. е. его значение равно сумме степенного ряда) только для x, удовлетворяющих неравенству $|x| < 1$.

Для линейного уравнения интервал голоморфности решения не меньше интервала голоморфности правой части уравнения относительно независимой переменной.

Теорема. *Если в линейном уравнении*

$$y' + p(x)\, y = q(x) \tag{83}$$

функции $p(x)$ *и* $q(x)$ *голоморфны в окрестности* $|x - x_0| < \rho$ *точки* $x = x_0$, *т. е.*

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \\ q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

причем ряды справа сходятся в области $|x - x_0| < \rho$, *то, какое бы число* y_0 *ни взять, существует единственное решение*

$$y = y(x), \tag{85}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0 \ \text{при}\ x = x_0, \tag{86}$$

и голоморфное по крайней мере в окрестности $|x - x_0| < \rho$ *точки* $x = x_0$, *т. е.*

$$y = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{87}$$

где ряд справа сходится по крайней мере в области $|x - x_0| < \rho$.

Утверждение этой теоремы непосредственно следует из известного вида решения задачи Коши (83) — (86):

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx} \left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\, dx \right] \tag{88}$$

(почему?).

Пример 4. Найти радиус сходимости биномиального ряда

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!} x^n + \ldots, \tag{89}$$

рассматривая функцию $y=(1+x)^m$ как решение соответствующей задачи Коши для некоторого однородного линейного уравнения, голоморфное в окрестности точки $x=0$.

Возьмем уравнение

$$y'+p(x)y=0 \tag{90}$$

и выберем $p(x)$ так, чтобы функция $y=(1+x)^m$ была решением этого уравнения. Имеем:

$$m(1+x)^{m-1}+p(x)(1+x)^m=0, \tag{91}$$

откуда

$$p(x)=-\frac{m}{1+x}. \tag{92}$$

Следовательно, искомым однородным линейным уравнением будет

$$y'-\frac{m}{1+x}y=0. \tag{93}$$

Функция $y=(1-x)^m$ обращается в единицу при $x=0$. Следовательно, она представляет собой решение уравнения (93), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=1 \text{ при } x=0. \tag{94}$$

Разыскивая это решение в виде ряда по степеням x, мы, в силу единственности голоморфного решения задачи Коши (93)—(94), снова получим ряд (89), который, согласно теореме Коши, заведомо сходится при $|x|<1$, ибо функция $-\frac{m}{1+x}$ голоморфна в окрестности $|x|<1$ точки $x=0$.

Таким образом, биномиальный ряд (89) заведомо сходится в области $|x|<1$. Если m есть целое положительное число, то этот ряд, вырождаясь в полином, очевидно сходится при всех x. Но при $m=-1$ биномиальный ряд обращается в прогрессию, сходящуюся лишь при $|x|<1$. Следовательно, радиус сходимости биномиального ряда (89) равен единице.

Аналогично рассмотренному примеру дифференциальные уравнения могут быть с успехом использованы для разложения функций в степенные ряды. При этом не только определение (оценка) радиуса сходимости, но и само нахождение коэффициентов степенного ряда может оказаться более легким, чем непосредственное вычисление их.

19. Доказанная выше теорема Коши распространяется на нормальную систему n-го порядка.

Пусть дана система

$$\frac{dy_k}{dx}=f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{95}$$

и поставлены начальные условия

$$y_1=y_1^{(0)},\ y_2=y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n=y_n^{(0)} \text{ при } x=x_0. \tag{96}$$

Теорема. *Если правые части системы* (95) *голоморфны в окрестности*

$$|x-x_0|<\rho,\quad |y_k-y_k^{(0)}|<r \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{97}$$

начальной точки $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, *т. е.*

$$f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}} a^{(k)}_{m_1 m_2 \ldots m_{n+1}} \times$$
$$\times (x - x_0)^{m_1} (y_1 - y_1^{(0)})^{m_2} \ldots (y_n - y_n^{(0)})^{m_{n+1}} \tag{98}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем ряды справа сходятся в области (97), *то система* (95) *имеет единственное решение*

$$y_1 = y_1(x), \; y_2 = y_2(x), \; \ldots, \; y_n = y_n(x), \tag{99}$$

удовлетворяющее начальным условиям (96) *и голоморфное в окрестности*

$$|x - x_0| < \rho_1 < \rho \tag{100}$$

точки $x = x_0$, *т. е.*

$$y_k = y_k^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(k)} (x - x_0)^m \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{101}$$

где ряды справа сходятся в области (100).

Доказательство этой теоремы для $n = 2$ см., например, в книге: Матвеев. Методы интегрирования, п. **147.** В общем случае доказательство проводится аналогично.

На практике вычисление коэффициентов рядов (101), так же как и в случае одного уравнения, удобнее производить, записывая эти ряды в виде рядов Тэйлора и используя уравнения данной системы (95).

20. В случае линейной системы, так же как и в случае одного линейного уравнения, при постановке задачи Коши начальные значения искомых функций можно задавать любыми и интервал голоморфности решения не меньше интервала голоморфности правых частей системы относительно независимой переменной.

Пусть дана линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) y_l + f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{102}$$

где коэффициенты $p_{kl}(x)$ и функции $f_k(x)$ голоморфны в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$:

$$p_{kl}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k, l)} (x - x_0)^m, \; f_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k)} (x - x_0)^m,$$
$$|x - x_0| < \rho \quad (k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{103}$$

Теорема. *При сделанном предположении система* (102) *имеет единственное решение*

$$y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x), \tag{104}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1=y_1^{(0)},\ y_2=y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n=y_n^{(0)} \quad \text{при} \quad x=x_0, \tag{105}$$

где $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — *любые заданные числа. Это решение будет голоморфно, по крайней мере, в окрестности* $|x-x_0|<\rho$ *точки* $x=x_0$, *т. е.*

$$y_k=y_k^{(0)}+\sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(k)}(x-x_0)^k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{106}$$

где ряды справа сходятся, по крайней мере, в области $|x-x_0|<\rho$.

Доказательство этой теоремы проводится так же, как и в общем случае [см., например: Матвеев. Методы интегрирования, п. **148**]. Но здесь удается выбрать более хорошую, а именно линейную (относительно искомых функций) мажоранту, что позволяет доказать сходимость формальных рядов во всем интервале $|x-x_0|<\rho$.

Отметим, что если все $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ — целые функции, то и решение (104) с любыми начальными данными будет целой функцией.

В частности, это будет иметь место, если все $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ — полиномы. Если же они имеют вид $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы, то начальные значения искомых функций также можно задавать произвольно, а начальное значение x_0 не должно обращать в нуль ни один из знаменателей $Q(x)$. При этом решение будет заведомо голоморфно в окрестности $|x-x_0|<\rho$, где ρ — расстояние от точки $x=x_0$ до ближайшего из корней уравнений $Q(x)=0$, включая комплексные корни.

21. Пусть дано уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{107}$$

и поставлены начальные условия

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x=x_0. \tag{108}$$

Теорема. *Если функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *голоморфна в окрестности*

$$|x-x_0|<\rho,\ |y-y_0|<r,\ |y'-y_0'|<r,\ \ldots,\ |y^{(n-1)}-y_0^{(n-1)}|<r \tag{109}$$

начальной точки $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, *то она имеет единственное решение*

$$y = y(x), \tag{110}$$

удовлетворяющее начальным условиям (108). *Это решение голоморфно в окрестности*

$$|x - x_0| < \rho_1 < \rho \tag{111}$$

точки $x = x_0$, *т. е. представимо в виде*

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \; |x - x_0| < \rho_1. \tag{112}$$

Действительно, вводя неизвестные функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ по формулам

$$y = y_1, \; y' = y_2, \; \ldots, \; y^{(n-1)} = y_n, \tag{113}$$

приведем задачу Коши (107)—(108) к нахождению решения нормальной системы n-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \tag{114}$$

с начальными условиями

$$y_1 = y_0, \; y_2 = y_0', \; \ldots, \; y_n = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{115}$$

При сделанном предположении относительно функции $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ правые части системы (114) удовлетворяют условиям теоремы Коши. Поэтому она имеет единственное решение

$$y_1 = y_1(x), \; y_2 = y_2(x), \; \ldots, \; y_n = y_n(x), \tag{116}$$

удовлетворяющее начальным условиям (115) и голоморфное в окрестности $|x - x_0| < \rho_1 < \rho$ точки $x = x_0$. Так как $y_1 = y$, то, возвращаясь к уравнению n-го порядка (107), мы и получим утверждение теоремы.

Вычисления коэффициентов ряда (112), представляющего решение, можно выполнять либо методом неопределенных коэффициентов, либо записывая решение (110) в виде ряда Тэйлора:

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \\ + \frac{y^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \ldots \qquad (117)$$

и используя уравнение (107).

22. В случае линейного уравнения n-го порядка начальные значения искомой функции и ее $(n-1)$ первых производных можно задавать произвольно, и решение задачи Коши будет голоморфно по крайней мере в области голоморфности правой части уравнения относительно независимой переменной.

Пусть дано линейное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + \\ + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x), \qquad (118)$$

где коэффициенты $p_k(x)$ и функция $f(x)$ голоморфны в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$.

Теорема. *При сделанном предположении уравнение* (118) *имеет единственное решение*

$$y = y(x), \qquad (119)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0, \qquad (120)$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — *любые заданные числа. Это решение будет голоморфно по крайней мере в окрестности* $|x - x_0| < \rho$ *точки* $x = x_0$, *т. е.*

$$y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{y^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad (121)$$

где ряд справа сходится по крайней мере в области $|x - x_0| < \rho$.

Действительно, приводя уравнение (118) к соответствующей нормальной системе, получим линейную систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ &\ldots\ldots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ &\frac{dy_n}{dx} = -p_1(x) y_n - p_2(x) y_{n-1} - \ldots - \\ &\qquad - p_{n-1}(x) y_2 - p_n(x) y_1 + f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

Будем искать решение этой системы с начальными условиями

$$y_1 = y_0,\ y_2 = y_0',\ \ldots,\ y_n = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0. \tag{123}$$

Это решение, согласно теореме Коши для линейной системы, существует, единственно и заведомо голоморфно в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$. Возвращаясь к уравнению (118), получим утверждение теоремы.

Отметим, что если все $p_k(x)$ и $f(x)$ суть целые функции, то и всякое решение уравнения (118) будет целой функцией. Во всех остальных случаях нельзя выбирать x_0 произвольно, и решение может оказаться голоморфным лишь в окрестности выбранного значения x_0. В частности, если все $p_k(x)$ и $f(x)$ суть отношения полиномов $\frac{P(x)}{Q(x)}$, то x_0 не должно обращать в нуль ни один из знаменателей $Q(x)$, и ряд, представляющий решение, будет сходиться по крайней мере в области $|x - x_0| < \rho$, где ρ — расстояние от точки $x = x_0$ до ближайшего корня уравнений $Q(x) = 0$, включая комплексные корни.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \frac{2}{(x-1)^2}y = 0. \tag{124}$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y = 1, \quad y' = 1 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{125}$$

Согласно теореме Пикара, искомое решение существует и определено по крайней мере в интервале $(-\infty, 1)$ (почему?). В силу теоремы Коши оно голоморфно в окрестности точки $x = 0$, причем радиус сходимости ряда, представляющего решение, заведомо не меньше единицы (почему?). Найдем это решение. Оно имеет вид

$$y = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k. \tag{126}$$

Найдем коэффициенты c_k методом неопределенных коэффициентов. Перепишем уравнение (124) в виде

$$(x^2 - 2x + 1)\, y'' - 2y = 0. \tag{127}$$

Подставляя в него ряд (126), получим

$$(x^2 - 2x + 1) \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2} - 2\left(1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k\right) = 0. \tag{128}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&x^0\colon\ c_2\cdot 2\cdot 1 - 2 = 0,\\
&x\colon\ -2\cdot c_2\cdot 2\cdot 1 + c_3\cdot 3\cdot 2 - 2 = 0,\\
&x^2\colon\ c_2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot c_3\cdot 3\cdot 2 + c_4\cdot 4\cdot 3 - 2c_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x^k\colon\ c_k\cdot k\cdot (k-1) - 2\cdot c_{k+1}\cdot (k+1)\cdot k + c_{k+2}\cdot (k+2)(k+1) - 2\cdot c_k = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{129}$$

Равенства (129) дают возможность определить последовательно все коэффициенты c_k. Получим:

$$c_2 = 1, \; c_3 = 1, \; \ldots, \; c_k = 1, \; \ldots \tag{130}$$

Подставляя их в разложение (126), имеем:

$$y = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{при} \quad |x| < 1. \tag{131}$$

Входящий сюда ряд сходится при $|x| < 1$ и представляет собой решение уравнения (124), удовлетворяющее начальным условиям (125) и голоморфное в окрестности $|x| < 1$ точки $x = 0$. Но функция $y = \frac{1}{1-x}$, являющаяся суммой этого ряда, как нетрудно убедиться, является решением поставленной задачи Коши (124) — (125) не только в интервале $|x| < 1$, но и в более широком интервале $(-\infty, 1)$.

Итак, искомым решением задачи Коши (124) — (125) является функция

$$y = \frac{1}{1-x}, \tag{132}$$

которая для значений x из интервала $|x| < 1$ представима степенным рядом (131).

Покажем, как найти коэффициенты ряда (126), не пользуясь методом неопределенных коэффициентов. Запишем ряд (126) в виде

$$y = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{133}$$

Найдем $y^{(k)}(0)$. Из уравнения (124) находим (полагая $x = 0$, $y = 1$): $y''(0) = 2$. Для дальнейших вычислений удобнее воспользоваться уравнением (127). Дифференцируя его, имеем:

$$(2x - 2)\, y'' + (x^2 - 2x + 1)\, y''' - 2y' = 0, \tag{134}$$

откуда (полагая $x = 0$, $y' = 1$, $y'' = 2$) найдем: $y'''(0) = 6$. Аналогично определяются все остальные $y^{(k)}(0)$.

Пример 2. Дано уравнение

$$(x^2 + x + 1)\, y'' + xy' + y = 0. \tag{135}$$

Какие начальные данные можно брать при постановке задачи Коши? В каком интервале будет существовать решение задачи Коши? В какой окрестности начального значения x оно будет голоморфно?

Записав уравнение (135) в виде

$$y'' + \frac{x}{x^2 + x + 1}\, y' + \frac{1}{x^2 + x + 1}\, y = 0 \tag{136}$$

(т. е. сделав коэффициент при старшей производной равным единице), мы получаем линейное уравнение, коэффициенты которого непрерывны при всех значениях x. Следовательно, начальные данные x_0, y_0, y_0' можно выбирать произвольно, и решение задачи Коши определено при всех x. Так как коэффициенты уравнения (136) голоморфны в окрестности любой точки $x = x_0$, то и решение с начальными данными x_0, y_0, y_0' голоморфно в окрестности точки $x = x_0$. При определении радиуса сходимости ряда

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{137}$$

представляющего это решение в окрестности точки $x = x_0$, нужно принять во внимание корни знаменателей коэффициентов уравнения (136) как вещественные, так и комплексные. Решая уравнение

$$x^2 + x + 1 = 0, \tag{138}$$

находим $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Поэтому ряд (137) заведомо сходится в области

$$|x - x_0| < \rho, \tag{139}$$

где ρ — расстояние от точки $x = x_0$ до точек $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ на комплексной плоскости (z) (рис. 50):

$$\rho = \sqrt{\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}. \tag{140}$$

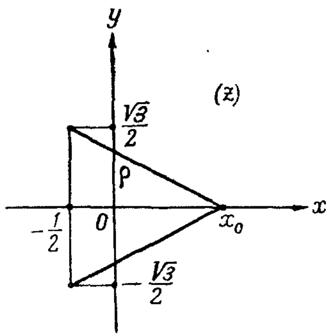

Рис. 50.

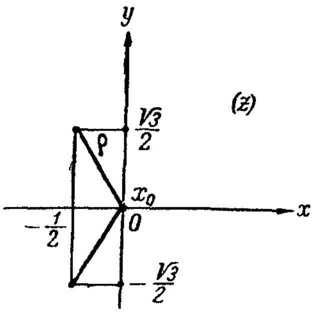

Рис. 51.

В частности, при $x_0 = 0$ имеем: $\rho = 1$ (рис. 51), так что решение с начальными условиями

$$y = y_0, \quad y' = y_0' \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{141}$$

где y_0 и y_0' — любые заданные числа, определено при всех x. Это решение заведомо представимо степенным рядом

$$y = y_0 + y_0' x + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k \tag{142}$$

при $|x| < 1$. Для значений x, лежащих на границе или вне интервала $|x| < 1$, сходимость ряда (142) теоремой Коши не гарантируется.

23. Теорема Коши устанавливает только нижнюю границу для радиуса сходимости ряда, представляющего решение. На деле этот радиус может оказаться больше. Кроме того, голоморфное решение может существовать и в случае невыполнения условия теоремы Коши.

Пример 1. Для уравнения

$$(x^2-1)\,y''-2xy'+2y=0 \tag{143}$$

единственным решением, удовлетворяющим начальным условиям

$$y=0,\quad y'=1 \quad \text{при} \quad x=0, \tag{144}$$

очевидно будет

$$y=x. \tag{145}$$

Это решение голоморфно в любой окрестности точки $x=0$, в то время как $\rho=1$ (почему?).

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0 \tag{146}$$

и поставлены начальные условия

$$y=0,\quad y'=1 \quad \text{при} \quad x=0, \tag{147}$$

т. е. ищется решение $y=y(x)$, обладающее свойством:

$$y(x)\to 0,\quad y'(x)\to 1 \quad \text{при} \quad x\to 0. \tag{148}$$

Коэффициенты уравнения (146), очевидно, не голоморфны ни в какой окрестности точки $x=0$, так что теорема Коши не применима. Однако существует решение задачи Коши (146) — (147), голоморфное в окрестности точки $x=0$. Например, таким решением будет

$$y_1=x. \tag{149}$$

Это решение голоморфно в любой окрестности точки $x=0$.

Вопрос о существовании и свойствах решений в случае невыполнения условия теоремы Коши изучается в *аналитической теории дифференциальных уравнений*.

§ 6. ЗАДАЧИ

Доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям; оценить область существования решения; построить второе приближение к искомому решению (по методу Пикара):

5. $y'=x^2+y^2$, $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$; $y=0$ при $x=0$.

6. $y'=x^2-y^2$, $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$; $y=0$ при $x=0$.

7. $y'=\sin(xy)$, $|x|\leqslant 1$, $|y|<+\infty$; $y=1$ при $x=0$.

8. $y'+\dfrac{1}{x-1}y=0$; $y=1$ при $x=0$.

9. $y'=|y|$; $y=1$ при $x=0$.

10. $y'=x+y-z^2$, $z'=yz+1$; $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$; $|z|\leqslant 1$; $y=0$, $z=0$ при $x=0$.

11. $y''+2xy=0$; $y=2$, $y'=3$ при $x=1$.

Найти методом Пикара решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

12. $y'=y$; $y=1$ при $x=0$.
13. $y'=-z+1$, $z'=y-x$; $y=1$, $z=0$ при $x=0$.
14. $y''-2xy'-2y=0$; $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

Доказать, пользуясь теоремой Коши, существование и единственность голоморфного решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям, оценить область голоморфности решения (область сходимости степенного ряда, представляющего решение), найти свободный член и коэффициенты при $x-x_0$, $(x-x_0)^2$ и $(x-x_0)^3$ в разложении решения в ряд по степеням $x-x_0$:

15. $y'=x^2+y^2$, $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$; $y=0$ при $x=0$.
16. $y'+\frac{1}{x-1}y=0$; $y=1$ при $x=0$.
17. $y''=y^2+x$, $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|y'|\leqslant 1$; $y=0$, $y'=0$ при $x=0$.
18. $y''+2xy=0$; $y=2$, $y'=3$ при $x=1$.
19. $y'=x+y-z^2$, $z'=yz+1$; $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|z|\leqslant 1$; $y=0$, $z=0$ при $x=0$.
20. $y'=\frac{1}{x}z$, $z'=-y+1$; $y=2$, $z=-1$ при $x=1$.

Найти голоморфное решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

21. $y'=y^2$; $y=1$ при $x=0$.
22. $y'=1+2xy$; $y=0$ при $x=0$.
23. $y'=-z+1$, $z'=y-x$; $y=1$, $z=0$ при $x=0$.
24. $y''-2xy'-2y=0$; $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

Для каждого из следующих линейных уравнений и линейных систем найти (пользуясь теоремой Пикара и теоремой Коши) и сравнить оценки области существования и области голоморфности решения, удовлетворяющего поставленным начальным условиям:

25. $y'+\frac{x}{1+x^2}y=x$; $y=y_0$ при $x=0$.
26. $y''-\frac{1}{1+x^4}y'+\frac{x}{x^2+x+2}y=0$; $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=0$.
27. $y'=\frac{1}{x-2}y+\frac{1}{x^2+1}z-x$, $z'=y$; $y=y_0$, $z=z_0$ при $x=0$.
28. $y'=\frac{1}{x+1}z+y$, $z'=\frac{1}{1+x^2}y+\frac{1}{x}$; $y=y_0$, $z=z_0$ при $x=1$.
29. $y'-\frac{1}{x-2}y=0$; $y=y_0$ при $x=x_0\neq 2$. (Сравнить с фактической областью существования и голоморфности решения.)

Какие начальные данные можно задавать, чтобы задача Коши имела единственное решение? В каких областях гарантированы существование и голоморфность этого решения:

30. $x^2y'+xy=1$. **31.** $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x}{x-1}y=0$.

32. $(x^2+1)y''+2xy'-y=0$. **33.** $y'''+xy=0$.

34. $y'=\frac{1}{1-x^2}z+y, \quad z'=x-y$.

Для каждого из следующих уравнений определить тип особой точки $x=0$, $y=0$, привести уравнение к простейшему (каноническому) виду, построить схему расположения интегральных кривых в окрестности особой точки:

35. $y'=\frac{3x+4y}{-x-2y}$. **36.** $y'=\frac{x-2y}{2x-3y}$.

37. $y'=\frac{x+2y}{2x-y}$. **38.** $y'=\frac{x-y}{x-2y}$.

39. $y'=\frac{x+2y}{4x-y}$.

Определить тип особой точки $x=0$, $y=0$ следующих уравнений:

40. $y'=\frac{-x-2x^3}{y+2y^3}$. **41.** $y'=\frac{-x+y(x^2+y^2)}{y+x(x^2+y^2)}$.

ГЛАВА VI

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Однородное и неоднородное уравнения. **2.** Существование и единственность решения задачи Коши. **3.** Инвариантность линейного уравнения относительно любого преобразования независимой переменной. **4.** Инвариантность линейного уравнения относительно линейного преобразования искомой функции.

§ 2. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ n-го ПОРЯДКА

5. Свойства решений. **6.** Линейно-независимые частные решения. **7.** Формула Остроградского — Лиувилля. **8.** Фундаментальная система решений. **9.** Построение общего решения однородного линейного уравнения по фундаментальной системе решений.

§ 3. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

10. Приведение интегрирования неоднородного уравнения в случае, когда известно одно частное решение его, к интегрированию соответствующего однородного уравнения. **11.** Метод вариации произвольных постоянных.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

12. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае различных корней характеристического уравнения. **13.** Случай наличия кратных корней. **14.** Нахождение частного решения неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов. **15.** Понятие об устойчивости нулевого решения уравнения второго порядка.

Исследование устойчивости нулевого решения однородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения. **16.** Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления. **17.** Операторный (операционный) метод интегрирования линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

§ 5. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

18. Необходимое условие приводимости при помощи замены независимой переменной. **19.** Уравнение Эйлера. **20.** Уравнение Чебышева. **21.** Приведение к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены искомой функции.

§ 6. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

22. Приведение к уравнению, не содержащему члена с первой производной. **23.** Приведение к самосопряженному виду. **24.** Понижение порядка. **25.** Интегрирование при помощи степенных рядов. **26.** Интегрирование при помощи обобщенных степенных рядов. **27.** Уравнение Бесселя. **28.** Уравнение Гаусса. **29.** Уравнение Лежандра. **30.** Колебательный характер решений однородного линейного уравнения второго порядка. Признак неколебательности решений. **31.** Теорема Штурма. **32.** Теорема сравнения.

§ 7. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования, гл. VI, пп. **156—171**; гл. VII, пп. **173—185**; гл. VIII, пп. **186—196**.

Степанов, гл. V, §§ 1—3; гл. VI, § 1 (стр. 214—233, 236—240), § 2 (до стр. 255).

Эльсгольц, гл. II, §§ 3—5, § 6 (до стр. 117), § 7.

Дополнительная

Матвеев. Методы интегрирования, п. **172**.

Петровский, гл. V, §§ 38, 39; гл. VI, § 52.

Понтрягин, гл. I, § 4 (примеры), § 5; гл. II, §§ 7—10, 12.

Степанов, гл. V, § 4, п. **3**; гл. VI, § 1, п. **3**, § 2 (стр. 255—259).

Эльсгольц, гл. II, § 7 (стр. 130—134), § 8.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим линейное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+ \\ +p_n(x)y=f(x). \qquad (1)$$

Напомним, что, если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+ \\ +p_n(x)y=0 \qquad (2)$$

и называется *однородным*. Если $f(x)\not\equiv 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным*.

Обозначим левую часть уравнения (1) или (2) через $L(y)$:

$$L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+ \\ +p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y. \qquad (3)$$

Всякой функции $y=y(x)$, имеющей производную n-го порядка, соответствует вполне определенное значение $L(y)$, которое получается из $y=y(x)$ путем выполнения операций, указанных в правой части формулы (3) (дифференцирование, умножение на функции $p_k(x)$ и сложение). Будем называть $L(y)$ *линейным дифференциальным оператором*.

Пользуясь оператором $L(y)$, уравнения (1) и (2) можно записать в виде

$$L(y)=f(x) \qquad (1')$$

и

$$L(y)=0. \qquad (2')$$

Отметим, что оператор $L(y)$ обладает двумя важными свойствами:

1) $L(cy)=cL(y)$ $(c=\text{const})$,

2) $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$.

2. Предположим, что коэффициенты $p_k(x)$ и правая часть $f(x)$ непрерывны в интервале (a, b) $(a\geqslant-\infty,\ b\leqslant+\infty)$.* Тогда (гл. V, п. 6) уравнение (1) имеет единственное решение

$$y=y(x), \qquad (4)$$

определенное во всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям

$$y=y_0,\quad y'=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ при } x=x_0\in(a, b), \qquad (5)$$

---

* Вместо открытого интервала (a, b) можно взять замкнутый интервал (с одного или с обоих концов).

где числа y_0, y_0', ..., $y_0^{(n-1)}$ задаются произвольно. В частности, единственным решением однородного линейного уравнения (2) с нулевыми начальными условиями

$$y=0, \quad y'=0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}=0 \text{ при } x=x_0 \tag{6}$$

будет нулевое решение

$$y\equiv 0. \tag{7}$$

3. Линейное уравнение (1) остается линейным, если заменить x новой независимой переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ определена и непрерывно дифференцируема n раз в интервале (t_0, t_1), причем $\varphi(t_0)=a$, $\varphi(t_1)=b$, $\varphi'(t)\neq 0$ в (t_0, t_1). В этом легко убедиться, выполняя в уравнении (1) подстановку $x=\varphi(t)$. При этом однородное уравнение остается однородным.

4. Линейное преобразование искомой функции $y=\alpha(x)z+\beta(x)$ также не нарушает линейности уравнения, причем однородная линейная замена искомой функции $y=\alpha(x)z$ сохраняет однородность уравнения.

Указанными заменами независимой переменной и искомой функции можно воспользоваться для упрощения линейного уравнения, в частности для приведения его к уравнению с постоянными коэффициентами.

§ 2. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ n-го ПОРЯДКА

5. Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$L(y)\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0. \tag{1}$$

Всякое решение этого уравнения, так же как и любое решение неоднородного уравнения, является частным решением (почему?). Решения однородного уравнения обладают следующими характерными свойствами:

1) Если y_1 — частное решение однородного уравнения (1), то Cy_1, где C — произвольная постоянная, тоже будет решением этого уравнения.

Действительно, так как

$$L(y_1)\equiv 0 \quad (a<x<b), \tag{2}$$

то

$$L(Cy_1)=CL(y_1)\equiv 0, \quad L(Cy_1)\equiv 0 \quad (a<x<b), \tag{3}$$

т. е. Cy_1 — решение уравнения (1).

2) Если y_1 и y_2 — частные решения уравнения (1), то их сумма y_1+y_2 тоже является решением этого уравнения.

Это следует из того, что

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)\equiv 0,\ L(y_1+y_2)\equiv 0\ (a<x<b). \quad (4)$$

Из этих свойств решений следует, что если $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — частные решения однородного линейного уравнения (1), то их линейная комбинация

$$y=\sum_{k=1}^{m} C_k y_k, \quad (5)$$

где C_k — произвольные постоянные, тоже будет решением этого уравнения (почему?).

Для нахождения вещественных решений иногда используют комплексные решения. *Комплексная функция от вещественной переменной* x

$$y=u(x)+iv(x), \quad (6)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ — вещественные функции от x, называется *комплексным решением* однородного линейного уравнения (1), если она обращает уравнение (1) в тождество. При этом производная от комплексной функции (6) определяется равенством

$$y^{(k)}=u^{(k)}(x)+iv^{(k)}(x) \quad (7)$$

в предположении, что производные $u^{(k)}(x)$ и $v^{(k)}(x)$ существуют.

Вещественная и мнимая части комплексного решения (6) $y_1=u(x)$, $y_2=v(x)$ тоже являются решениями уравнения (1) (почему?), так что одному комплексному решению (6) соответствуют два вещественных решения.

В дальнейшем будем рассматривать вопрос о построении общего решения однородного уравнения (1).

Заметим, что если найдено n частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то функция

$$y=\sum_{k=1}^{n} C_k y_k \quad (8)$$

тоже есть решение уравнения (1). Однако, хотя функция (8) и зависит от n произвольных постоянных, она не всегда является общим решением уравнения (1). Для того чтобы функция (8) была общим решением уравнения (1), частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ должны удовлетворять некоторому дополнительному условию.

6. Функции

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x), \quad (9)$$

определенные и непрерывные в интервале (a, b), называются *линейно независимыми* в этом интервале, если соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(x) = 0, \tag{10}$$

где $\alpha_k (k=1, 2, \ldots, n)$ — постоянные числа, выполняется для всех x из (a, b) только в очевидном случае, т. е. когда все $\alpha_k (k=1, 2, \ldots, n)$ одновременно равны нулю. В противном случае функции (9) называются *линейно зависимыми* в (a, b).

Если одна из функций (9) тождественно равна нулю, то они линейно зависимы в (a, b) (почему?).

Для установления признаков линейной зависимости и независимости функций введем в рассмотрение *определитель Вронского* (*вронскиан*)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Если функции*

$$y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_n(x) \tag{12}$$

линейно зависимы в (a, b), *то* $W(x) \equiv 0$ *в* (a, b).

Действительно, пусть

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k(x) = 0 \quad (a < x < b), \tag{13}$$

где, например, $\alpha_n \neq 0$. Тогда

$$y_n = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k(x). \tag{14}$$

Подставляя функцию y_n в $W(x)$, получаем, что $W(x) \equiv 0$ $(a < x < b)$ (почему?).

Теорема 2. *Если функции* (12) *являются линейно независимыми решениями однородного линейного уравнения* (1), *коэффициенты которого непрерывны в* (a, b), *то* $W(x)$ *не обращается в нуль ни в одной точке* $x = x_0$ *из* (a, b).

В самом деле, пусть $W(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$. Составим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ &C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Эта система имеет ненулевое решение $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}, \ldots, C_n = C_n^{(0)}$ (почему?). Построим решение уравнения (1)

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k(x). \tag{16}$$

Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y = 0, \quad y' = 0, \ldots, y^{(n-1)} = 0 \text{ при } x = x_0 \tag{17}$$

(почему?), а тогда, в силу теоремы единственности, оно является нулевым, $y \equiv 0$, т. е. имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k(x) \equiv 0 \quad (a < x < b), \tag{18}$$

где не все $C_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю, т. е. решения (12) линейно зависимы в (a, b) вопреки предположению.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий признак линейной независимости n частных решений уравнения (1).

Для того чтобы n решений однородного линейного уравнения n-го порядка с непрерывными коэффициентами были линейно независимы в интервале непрерывности коэффициентов, необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан был отличен от нуля во всех точках этого интервала (почему?).

На деле достаточно убедиться, что $W(x)$ не обращается в нуль в какой-нибудь одной точке $x = x_0$ из интервала (a, b), ибо, если $W(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$ (почему?).

7. Для определителя Вронского n частных решений однородного линейного уравнения n-го порядка (1) имеет место следующая *формула Остроградского—Лиувилля*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}, \tag{19}$$

выражающая его значение через коэффициент при производной порядка $n-1$. Если, в частности, $p_1(x) = 0$, то $W(x) = W(x_0) = \text{const}$.

Из формулы (19) видно, что вронскиан n решений уравнения (1) обладает следующими двумя замечательными свойствами:

1. Если $W(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$.
2. Если $W(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$.

8. Совокупность n линейно независимых в (a, b) частных решений однородного линейного уравнения (1) называется *фундаментальной системой решений.*

Теорема. *Если коэффициенты уравнения* (1) *непрерывны в интервале* (a, b), *то фундаментальная система решений существует.*

Действительно, построим, пользуясь n раз теоремой Пикара, n решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 : y_1 = 1,\ y_1' = 0, \ldots, y_1^{(n-1)} = 0, \\ y_2 : y_2 = 0,\ y_2' = 1, \ldots, y_2^{(n-1)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n : y_n = 0,\ y_n' = 0, \ldots, y_n^{(n-1)} = 1. \end{array}\right\} \text{ при } x = x_0 \in (a, b). \tag{20}$$

Эти решения образуют фундаментальную систему решений, так как $W(x_0) = 1 \neq 0$.

Построенная фундаментальная система решений называется *нормированной* в точке $x = x_0$. Такая фундаментальная система решений существует только одна (почему?). Существует бесчисленное множество других фундаментальных систем. Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить в начальных условиях (20) число 1 любым другим числом, отличным от нуля.

Заметим, что если все коэффициенты уравнения (1) не только непрерывны, но и голоморфны в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$, то, пользуясь теоремой Коши, можно построить фундаментальную систему решений, голоморфных, по крайней мере, в той же окрестности $|x - x_0| < \rho$.

9. Зная фундаментальную систему решений уравнения (1), можно построить его общее решение.

Теорема. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *есть фундаментальная система решений уравнения* (1), *то формула*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k, \tag{21}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — *произвольные постоянные, дает общее решение уравнения* (1) *в области*

$$a < x < b,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty, \ldots, |y^{(n-1)}| < +\infty. \tag{22}$$

В самом деле в области (22) имеет место существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (1), функция (21) определена в области

$$a < x < b,\ |C_1| < +\infty,\ |C_2| < +\infty, \ldots, |C_n| < +\infty \tag{23}$$

и имеет непрерывные производные по x до порядка n. Легко убедиться, что оба пункта определения общего решения уравнения n-го порядка (гл. III, п. 6) здесь выполнены.

1) Система

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{n} C_k y_k, \\ y' &= \sum_{k=1}^{n} C_k y_k', \\ & \ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

разрешима относительно произвольных постоянных в области (22) (почему?).

2) Функция (21) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Следовательно, функция (21) является общим решением уравнения (1) в области (22).

Все решения однородного уравнения (1) содержатся в формуле (21). Уравнение (1) не может иметь более чем n линейно независимых частных решений.

Формула (21) дает возможность решить любую задачу Коши с начальными данными $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ из области (22) за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных.

Подставляя эти начальные данные в (24), получают систему

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x_0), \\ y_0' &= \sum_{k=1}^{n} C_k y_k'(x_0), \\ & \ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)}(x_0). \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Эта система разрешима относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (почему?). Подставляя найденные из нее значения произвольных постоянных $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}, \ldots$, $C_n = C_n^{(0)}$ в общее решение (21), получают искомое решение в виде

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k. \tag{26}$$

Это решение будет единственным.

Если фиксировать $x_0 \in (a, b)$, а $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ считать произвольными, то величины $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}$, найденные выше, являются (однородными линейными) функциями от $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и формула (26) даст общее решение однородного линейного уравнения (1) в форме Коши. В частности, в случае, когда фундаментальная система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ нормирована в точке $x = x_0$, общее решение в форме Коши приобретает наиболее простой вид

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_0^{(k-1)} y_k \quad \left(y_0^{(0)} = y_0\right). \tag{27}$$

Заметим, что если все коэффициенты уравнения (1) голоморфны в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$, то, построив фундаментальную систему решений, голоморфных в этой окрестности, и пользуясь формулой (21), получим *голоморфное* общее решение уравнения (1), определенное по крайней мере в области

$$|x - x_0| < \rho, \ |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty, \ldots, \ |y^{(n-1)}| < +\infty. \tag{28}$$

§ 3. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

10. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x). \tag{1}$$

Если известно частное решение y_1 уравнения (1), т. е.

$$L(y_1) \equiv f(x) \quad (a < x < b), \tag{2}$$

то, выполняя в уравнении (1) подстановку

$$y = y_1 + z, \tag{3}$$

где z — новая неизвестная функция, имеем:

$$L(y_1 + z) = f(x), \ L(y_1) + L(z) = f(x), \ L(z) = 0. \tag{4}$$

Таким образом, интегрирование неоднородного уравнения (1) приводится к интегрированию однородного уравнения

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) z' + p_n(x) z = 0 \tag{5}$$

с той же левой частью. Уравнение (5) называется *однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению* (1).

Если

$$z = \sum_{k=1}^{n} C_k z_k \tag{6}$$

есть общее решение уравнения (5) в области

$$a < x < b,\ |z| < +\infty,\ |z'| < +\infty,\ \ldots,\ |z^{(n-1)}| < +\infty, \tag{7}$$

то формула

$$y = y_1 + \sum_{k=1}^{n} C_k z_k \tag{8}$$

дает общее решение неоднородного уравнения (1) в области

$$a < x < b,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty,\ \ldots,\ |y^{(n-1)}| < +\infty \tag{9}$$

(почему?).

Все решения уравнения (1) содержатся в формуле (8).

Если правая часть $f(x)$ уравнения (1) является суммой нескольких слагаемых

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \tag{10}$$

и если для каждого из уравнений

$$L(y) = f_k(x) \tag{11}$$

найдено частное решение y_k, то их сумма

$$Y_1 = \sum_{k=1}^{m} y_k \tag{12}$$

будет частным решением всего уравнения (1) (почему?).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'' + y = e^x + x. \tag{13}$$

Так как уравнения

$$y'' + y = e^x \text{ и } y'' + y = x \tag{14}$$

имеют соответственно частные решения $y_1 = \frac{1}{2} e^x$ и $y_2 = x$, то функция

$$Y_1 = \frac{1}{2} e^x + x \tag{15}$$

будет частным решением всего уравнения (13).

Однородное уравнение

$$z'' + z = 0, \tag{16}$$

соответствующее неоднородному уравнению (13), имеет общее решение

$$z = C_1 \cos x + C_2 \sin x.^* \tag{17}$$

Поэтому

$$y = \frac{1}{2} e^x + x + C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{18}$$

будет общим решением уравнения (13).

* Так как $z_1 = \cos x$, $z_2 = \sin x$ — фундаментальная система решений (почему?).

11. Если частное решение уравнения (1) найти трудно, но известна фундаментальная система решений $z_1, z_2, \ldots, z_n$ соответствующего однородного уравнения (5), то для нахождения общего решения неоднородного уравнения (1) обычно применяют *метод вариации произвольных постоянных* (*метод Лагранжа*).

Этот метод состоит в том, что общее решение уравнения (1) получается из общего решения (6) уравнения (5) заменой произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ соответствующими функциями от x, т. е. решение уравнения (1) ищется в виде

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) z_k, \tag{19}$$

где $C_k(x)$ — функции от x, которые нужно выбрать так, чтобы функция (19) была решением уравнения (1).

Подставляя (19) в (1), получим одно соотношение между искомыми функциями $C_k(x)$. Поэтому можно ввести еще $n-1$ соотношений. Следуя Лагранжу, будем вводить эти соотношения, дифференцируя последовательно $n-1$ раз равенство (19) и приравнивая каждый раз нулю группу членов, содержащую производные от $C_k(x)$:

$$\left.\begin{array}{l|l}
p_n(x)\cdot & y = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) z_k, \\
p_{n-1}(x)\cdot & y' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) z_k' + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) z_k}_{0}, \\
p_{n-2}(x)\cdot & y'' = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) z_k'' + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) z_k'}_{0}, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_1(x)\cdot & y^{(n-1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k(x) z_k^{(n-1)} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{n} C_k'(x) z_k^{(n-2)}}_{0}.
\end{array}\right\} \tag{20}$$

Дифференцируя еще раз, имеем:

$$1\cdot \Big|\; y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) z_k^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} C_k'(x) z_k^{(n-1)}. \tag{21}$$

Подставим эти значения $y, y', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ в уравнение (1). Для этого умножим уравнения (20), (21) соответственно на

$p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$, $p_{n-2}(x), \ldots, p_1(x)$, 1, сложим почленно и приравняем полученную сумму правой части уравнения (1):

$$\sum_{k=1}^{n} C_k L(z_k) + \sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, z_k^{(n-1)} = f(x). \tag{22}$$

Но все $L(z_k) \equiv 0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, z_k^{(n-1)} = f(x). \tag{23}$$

Таким образом, для определения $C_k(x)$ получаем следующие n соотношений

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, z_k = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, z_k = 0,\\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, z_k^{(n-2)} = 0,\\
&\sum_{k=1}^{n} C'_k(x)\, z_k^{(n-1)} = f(x).
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Система (24) разрешима относительно $C'_k(x)$ (почему?). Находим:

$$C'_k(x) = \varphi_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

где $\varphi_k(x)$ — непрерывные функции (почему?). Поэтому

$$C_k(x) = \int \varphi_k(x)\, dx + C_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Подставляя найденные значения $C_k(x)$ в формулу (19) и выделяя члены, не содержащие произвольных постоянных, получим:

$$y = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} z_k \int \varphi_k(x)\, dx}_{y_1} + \sum_{k=1}^{n} C_k z_k. \tag{27}$$

Эта формула дает общее решение уравнения (1) в области (9). Первое слагаемое является частным решением, соответствующим нулевым значениям произвольных постоянных.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{28}$$

методом вариации произвольных постоянных.

Так как соответствующее однородное уравнение $z'' + z = 0$ имеет фундаментальную систему решений $z_1 = \cos x$, $z_2 = \sin x$, то решение уравнения (28) ищем в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \tag{29}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x &= 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x &= \frac{1}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Решая эту систему относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ и интегрируя, находим:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{x}\,dx + C_1, \quad C_2(x) = \int \frac{\cos x}{x}\,dx + C_2. \tag{31}$$

Подставляя в (29), получим общее решение уравнения (28) в виде

$$y = -\cos x \int \frac{\sin x}{x}\,dx + \sin x \int \frac{\cos x}{x}\,dx + C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{32}$$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

12. Рассмотрим линейное уравнение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{1}$$

коэффициенты которого $a_1, a_2, \ldots, a_n$ суть постоянные вещественные числа, а правая часть $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b).

Так как интегрирование неоднородного уравнения (1) приводится к интегрированию соответствующего однородного уравнения, то изучим сначала однородное уравнение

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \tag{2}$$

Покажем, что это уравнение всегда может быть проинтегрировано в элементарных функциях. С этой целью построим фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций.

Следуя *Эйлеру*, будем искать решение уравнения (2) в виде

$$y = e^{\lambda x}, \tag{3}$$

где λ — некоторое постоянное число (вещественное или комплексное), которое нужно выбрать так, чтобы функция (3) обращала уравнение (2) в тождество. Подставляя функцию (3) в левую часть уравнения (2), получаем:

$$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda) e^{\lambda x}, \tag{4}$$

где

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n. \tag{5}$$

Функция $y = e^{\lambda x}$ будет решением уравнения (2), т. е. $L(e^{\lambda x}) \equiv 0$, если λ есть корень уравнения

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{6}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* уравнения (2). Характеристическое уравнение (6) можно формально составить по уравнению (2), заменяя производную от y соответствующей степенью λ, рассматривая при этом искомую функцию y как производную нулевого порядка от этой функции $y^{(0)} \equiv y$. Структура фундаментальной системы решений зависит от вида корней характеристического уравнения.

Рассмотрим сначала случай, когда все корни характеристического уравнения различны и вещественны: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Подставляя их в формулу (3), получим n решений:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}, \ldots, \; y_n = e^{\lambda_n x}. \tag{7}$$

Эти решения образуют фундаментальную систему решений, ибо они линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, так как их вронскиан отличен от нуля (почему?). Поэтому

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x} \tag{8}$$

будет общим решением уравнения (2) в области

$$-\infty < x < +\infty, \; |y| < +\infty, \; |y'| < +\infty, \ldots, \; |y^{(n-1)}| < +\infty. \tag{9}$$

Если все корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные, то комплексные корни входят сопряженными парами (почему?). Покажем, что каждой такой паре соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения. Пусть $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ — два таких корня. Подставляя в формулу (3) вместо λ число λ_1, получим комплексное решение

$$y = e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx). \tag{10}$$

Отделяя в нем вещественную и мнимую части, найдем два вещественных частных решения

$$y_1 = e^{ax}\cos bx,\ y_2 = e^{ax}\sin bx. \tag{11}$$

Эти решения линейно независимы (почему?). Сопряженному корню λ_2 соответствуют частные решения

$$e^{ax}\cos bx,\ -e^{ax}\sin bx, \tag{11'}$$

которые, очевидно, линейно зависимы с решениями (11).

Таким образом, паре комплексных сопряженных корней характеристического уравнения соответствуют два линейно независимых вещественных частных решения (11).

Если λ_1 и λ_2 чисто мнимые, $\lambda_{1,2} = \pm ib$, то вместо (11) получим

$$y_1 = \cos bx,\ y_2 = \sin bx. \tag{12}$$

Найдя вещественные частные решения, соответствующие другим парам сопряженных комплексных корней, и частные решения, соответствующие всем вещественным корням, получим фундаментальную систему решений (почему?). Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение.

13. Рассмотрим теперь случай, когда *среди корней характеристического уравнения имеются кратные*. Пусть λ_1 — корень кратности k. Тогда

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \text{ но } P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{13}$$

Дифференцируя тождество (4) m раз по λ, имеем:

$$L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{\nu=0}^{m} C_m^{\nu} P^{(\nu)}(\lambda)\, x^{m-\nu} e^{\lambda x}. \tag{14}$$

Полагая здесь $\lambda = \lambda_1$ и принимая во внимание (13), получим

$$L(x^m e^{\lambda_1 x}) = 0 \text{ при } m = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{15}$$

Следовательно, функции

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{16}$$

являются решениями уравнения (2).

Если λ_1 вещественно, то решения (16) вещественны. Если же λ_1 комплексное, $\lambda_1 = a + ib$, то ему и сопряженному с ним корню $\lambda_2 = a - ib$ той же кратности k соответствуют $2k$ вещественных частных решения, получающиеся из k комплексных решений (16) отделением вещественных и мнимых частей. Они имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx; \\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{array}\right\} \tag{17}$$

или

$$\left.\begin{array}{l}\cos bx,\ x\cos bx,\ \ldots,\ x^{k-1}\cos bx;\\ \sin bx,\ x\sin bx,\ \ldots,\ x^{k-1}\sin bx,\end{array}\right\} \tag{18}$$

если $\lambda_1 = ib$, $\lambda_2 = -ib$.

Построив вещественные частные решения, соответствующие другим кратным корням, и присоединив к ним вещественные частные решения, соответствующие различным корням, найденные по правилам, указанным в п. **12**, получим фундаментальную систему решений (почему?). Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (2).

14. Неоднородное линейное уравнение (1) всегда может быть проинтегрировано в квадратурах методом вариации произвольных постоянных.

В некоторых случаях удается проинтегрировать это уравнение проще, найдя предварительно одно частное решение его. Укажем случаи, когда это частное решение может быть найдено *методом неопределенных коэффициентов*, исходя из заранее заданного вида его.

Укажем вид частного решения для уравнения (1), правая часть которого есть произведение показательной функции на полином. Пусть

$$L(y) = e^{\alpha x} P_m(x), \tag{19}$$

где α — постоянное число, которое может быть как вещественным, так и комплексным, а $P_m(x)$ — полином от x степени m с вещественными или комплексными коэффициентами. Различают два случая.

I. Если число α не является корнем характеристического уравнения

$$P(\lambda) = 0, \tag{20}$$

то уравнение (19) имеет частное решение вида

$$y_1 = Q_m(x)\, e^{\alpha x}, \tag{21}$$

где $Q_m(x)$ — полином степени m с неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты определяются подстановкой (21) в уравнение (19), сокращением на $e^{\alpha x}$ и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного равенства (см., например, Матвеев. Методы интегрирования, п. **178**). При этом получается треугольная неоднородная линейная система уравнений относительно искомых коэффициентов полинома $Q_m(x)$, из которой, пользуясь тем, что $P(\alpha) \neq 0$, последовательно определяются все коэффициенты полинома $Q_m(x)$ и притом единственным образом. Таким образом, решение вида (21) существует и единственно. Если показатель α и коэффициенты полинома $P_m(x)$ вещественны, то и частное решение (21) будет вещественным.

II. Если α есть корень характеристического уравнения (20) кратности k, так что

$$P(\alpha)=P'(\alpha)=\ldots=P^{(k-1)}(\alpha)=0, \text{ но } P^{(k)}(\alpha)\neq 0, \tag{22}$$

то

$$y_1=x^k Q_m(x)e^{\alpha x}. \tag{23}$$

Коэффициенты полинома $Q_m(x)$ определяются так же, как и в случае I, причем роль $P(\alpha)$ играет $P^{(k)}(\alpha)$.

Уравнение с полиномиальной правой частью

$$L(y)=P_m(x) \tag{24}$$

можно рассматривать как частный случай уравнения (19), когда $\alpha=0$. Поэтому уравнение (24) имеет частное решение вида

$$y_1=Q_m(x), \tag{25}$$

если нуль не является корнем характеристического уравнения, или

$$y_1=x^k Q_m(x), \tag{26}$$

если нуль есть корень кратности k.

Для уравнения

$$L(y)=e^{ax}[P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx], \tag{27}$$

где a и b — постоянные вещественные числа, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — полиномы от x, причем один из них может тождественно равняться нулю, также можно найти частное решение методом неопределенных коэффициентов.

Действительно, пусть m есть старшая из степеней полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Тогда при помощи *формул Эйлера*

$$\cos bx=\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}, \quad \sin bx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i} \tag{28}$$

правая часть уравнения (27) может быть представлена в виде суммы произведений показательных функций $e^{(a-ib)x}$ и $e^{(a-ib)x}$ на полиномы степени m. Найдем частные решения, соответствующие каждому слагаемому. Вид этих частных решений существенно зависит от того, будет число $a+ib$ (а вместе с ним и число $a-ib$) корнем характеристического уравнения или нет. Складывая найденные частные решения и заменяя показательные функции $e^{(a+ib)x}$ и $e^{(a-ib)x}$ их выражениями через e^{ax}, $\cos bx$ и $\sin bx$, получим частное решение уравнения (27).

Выполняя указанные преобразования, придем к следующим результатам:

1) Если число $a+ib$ не является корнем характеристического уравнения, то уравнение (27) имеет частное решение вида

$$y_1 = e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right], \tag{29}$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — полиномы степени m с неопределенными коэффициентами. Они определяются подстановкой (29) в (27), сокращением на e^{ax} и приравниванием коэффициентов при $\cos bx$ и $\sin bx$, после чего останется приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левых и правых частях полученных двух равенств.

2) Если число $a+ib$ есть корень характеристического уравнения кратности k, то

$$y_1 = x^k e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right]. \tag{30}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y'' - y = e^x \cos^2 x. \tag{31}$$

Интегрируя соответствующее однородное уравнение

$$z'' - z = 0,$$

имеем:

$$\lambda^2 - 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm 1;\ z = C_1e^x + C_2e^{-x}. \tag{32}$$

Чтобы найти частное решение данного неоднородного уравнения (31), перепишем его, избавляясь от квадрата косинуса, в виде:

$$y'' - y = \frac{1}{2}e^x(1+\cos 2x). \tag{33}$$

Найдем частные решения уравнений

$$y'' - y = \frac{1}{2}e^x,\quad y'' - y = \frac{1}{2}e^x\cos 2x. \tag{34}$$

Первое из них есть уравнение вида (21). Здесь $a = 1$. Оно является простым корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\begin{array}{r|l} (-1)\cdot & y_1 = Axe^x \\ 0\cdot & y_1' = Ae^x + Axe^x \\ 1\cdot & y_1'' = 2Ae^x + Axe^x \\ \hline & 2Ae^x = \frac{1}{2}e^x,\ 2A = \frac{1}{2},\ A = \frac{1}{4}; \end{array}$$

$$y_1 = \frac{1}{4}xe^x. \tag{35}$$

Для определения вида частного решения второго из уравнений (34), которое является частным случаем уравнения (27), составляем число $a+ib$. Имеем: $a+ib = 1+i2$. Это число не является корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\begin{array}{r|l} (-1)\cdot & y_2 = e^x\,(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ 0\cdot & y_2' = e^x\,[(A+2B)\cos 2x + (B-2A)\sin 2x] \\ 1\cdot & y_2'' = e^x\,[(-3A+4B)\cos 2x - (3B+4A)\sin 2x] \\ \hline & e^x\,[(-4A+4B)\cos 2x - (4A+4B)\sin 2x] = \frac{1}{2}e^x\cos 2x; \end{array}$$

$$-4A+4B=\frac{1}{2},\ -4A-4B=0;\ A=-\frac{1}{16},\ B=\frac{1}{16};$$

$$y_2=\frac{1}{16}e^x(-\cos 2x+\sin 2x). \tag{36}$$

Частным решением всего уравнения (31) будет

$$Y_1=\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{16}e^x(-\cos 2x+\sin 2x). \tag{37}$$

Поэтому

$$y=\frac{1}{4}xe^x+\frac{1}{16}e^x(-\cos 2x+\sin 2x)+C_1e^x+C_2e^{-x} \tag{38}$$

есть общее решение уравнения (31).

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$y''+y=\sin x. \tag{39}$$

Соответствующее однородное уравнение

$$z''+z=0 \tag{40}$$

имеет характеристические числа $\lambda_{1,2}=\pm i$. Поэтому

$$z=C_1\cos x+C_2\sin x. \tag{41}$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения (39). Здесь число $a+ib=i$ является простым корнем характеристического уравнения. Поэтому

$$\begin{array}{r|l} & y_1 = x\,(A\cos x + B\sin x) \\ & y_1' = A\cos x + B\sin x + x\,(-A\sin x + B\cos x) \\ & y_1'' = -2A\sin x + 2B\cos x - x\,(A\cos x + B\sin x) \\ \hline & -2A\sin x + 2B\cos x = \sin x; \end{array}$$

$$-2A=1,\ 2B=0;\ A=-\frac{1}{2};\ B=0;$$

$$y_1=-\frac{1}{2}x\cos x. \tag{42}$$

Следовательно,

$$y=-\frac{1}{2}x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x \tag{43}$$

будет общим решением уравнения (39).

15. Рассмотрим дифференциальное уравнение движения точки по оси Ox:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{44}$$

где t — время; x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ — положение, скорость и ускорение точки в момент времени t. Предположим, что в рассматриваемой области правая часть уравнения (44) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши и, кроме того,

$$f(t,\ 0,\ 0) = 0 \text{ при всех } t \geqslant t_0. \tag{45}$$

Тогда уравнение (44) имеет нулевое решение

$$x \equiv 0. \tag{46}$$

Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$x = 0,\quad \frac{dx}{dt} = 0 \text{ при } t = t_0. \tag{47}$$

Движение, соответствующее решению (46), представляет собой состояние покоя.*

Будем называть решение (46) *невозмущенным решением*, а соответствующее ему движение *невозмущенным движением*. Всякое решение

$$x = x\ (t) \tag{48}$$

с ненулевыми начальными условиями

$$x = x_0,\ \frac{dx}{dt} = v_0 \text{ при } t = t_0, \tag{49}$$

где $x_0^2 + v_0^2 \neq 0$, будем называть *возмущенным решением (движением)*, а числа x_0 и v_0 — *возмущениями*.

Нулевое решение (46) называется *устойчивым в смысле Ляпунова* при $t \to +\infty$, если по всякому положительному числу $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta > 0$, что из неравенств

$$|x_0| < \delta,\ |v_0| < \delta \tag{50}$$

следуют неравенства

$$|x(t)| < \varepsilon,\quad \left|\frac{dx(t)}{dt}\right| < \varepsilon \tag{51}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Если хотя бы для одного $\varepsilon > 0$ не существует соответствующего $\delta > 0$, то решение (46) называется *неустойчивым*.

Решение (46) называется *асимптотически* устойчивым, если оно устойчиво, и, кроме того,

$$x(t) \to 0,\quad \frac{dx(t)}{dt} \to 0 \text{ при } t \to +\infty. \tag{52}$$

* См. гл. III, п. 2.

Наиболее просто вопрос об устойчивости исследуется в случае, когда уравнение (44) есть однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дано уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=0, \tag{53}$$

где a_1 и a_2 — постоянные вещественные числа. В этом случае об устойчивости нулевого решения $x\equiv 0$ можно судить по корням характеристического уравнения

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0 \tag{54}$$

и соответствующему им виду общего решения уравнения (53).

Если оба корня характеристического уравнения отрицательны или имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение $x\equiv 0$ устойчиво и притом асимптотически.

Если хоть одно из характеристических чисел положительно или имеет положительную вещественную часть, то решение $x\equiv 0$ неустойчиво.

Если характеристические числа чисто мнимые, то решение $x\equiv 0$ устойчиво, но не асимптотически.

В случае, когда один корень характеристического уравнения равен нулю, наличие устойчивости решения $x\equiv 0$ зависит от знака второго корня: решение $x\equiv 0$ (неасимптотически) устойчиво, если второй корень отрицателен, и неустойчиво, если он положителен. В рассматриваемом случае $a_2=0$, и устойчивость определяется знаком a_1.

Наконец, если оба корня характеристического уравнения равны нулю, так что $a_1=a_2=0$ и уравнение (53) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \tag{55}$$

решение $x\equiv 0$ неустойчиво.

16. Предположим, что материальная точка массы m движется по оси Ox под влиянием следующих сил:

1) сила сопротивления среды, $-a\frac{dx}{dt}$;

2) восстанавливающая сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия, $-bx\,(b>0)$;

3) внешняя сила, направленная по оси Ox и равная $F(t)$ в момент времени t. Тогда, согласно второму закону Ньютона, имеем:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a\frac{dx}{dt}-bx+F(t). \tag{56}$$

Это есть дифференциальное уравнение движения данной точки. Характер движений (решений), определяемых этим уравнением, которые обычно называются *колебаниями*, зависит от выбора начальных данных и от соотношений между силами, действующими на точку. Для упрощения записи введем обозначения

$$h = \frac{a}{2m}, \quad k^2 = \frac{b}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}. \tag{57}$$

Тогда уравнение (56) может быть записано в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t). \tag{58}$$

Уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \tag{59}$$

соответствующее случаю, когда внешняя сила тождественно равна нулю, называется *уравнением свободных колебаний*. Если $f(t) \neq 0$, то уравнение (58) называется *уравнением вынужденных колебаний*.

Изучение движений, определяемых уравнением свободных колебаний, сводится к рассмотрению вида корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2h\lambda + k^2 = 0. \tag{60}$$

Рассмотрим сначала колебания в среде без сопротивления, т. е. когда $h = 0$. Уравнение (59) принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \tag{61}$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \tag{62}$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm ik$, и общим решением уравнения (61) будет

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \tag{63}$$

или (полагая $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$)

$$x = A \sin(kt + \varphi). \tag{64}$$

Такое движение называется *чисто гармоническим колебанием*. Число A называется *амплитудой* этого колебания, k — *частотой*, φ — *начальной фазой*. Значения A и φ определяются из начальных условий

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \text{ при } t = t_0. \tag{65}$$

Решение $x \equiv 0$, определяемое уравнением (61), будет устойчивым, но не асимптотически (почему?).

Если колебания происходят в среде с сопротивлением, то

$$\lambda_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}. \tag{66}$$

Ограничимся случаем $h^2 < k^2$ и $h > 0$. Тогда

$$x = Ae^{-ht} \sin\left(\sqrt{k^2 - h^2}\, t + \varphi\right). \tag{67}$$

Такое движение называется *затухающим гармоническим колебанием с амплитудой* Ae^{-ht}, частотой $\sqrt{k^2 - h^2}$ *и начальной фазой* φ. Число A называется *начальной амплитудой*. Значения чисел A и φ определяются из начальных условий (65).

Решение $x = 0$, определяемое уравнением (59), асимптотически устойчиво (почему?).

Рассмотрим один частный случай уравнения вынужденных колебаний (58), когда внешняя сила является синусоидальной величиной и колебания происходят в среде без сопротивления:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = M \sin \omega t. \tag{68}$$

Общее решение этого уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения (61) и частного решения $x_1 = x_1(t)$ самого уравнения (68):

$$x = A \sin(kt + \varphi) + x_1(t). \tag{69}$$

Соответствующие им колебания называются *вынужденными колебаниями*. Они складываются из свободных колебаний (64), определяемых уравнением (61), которые называются в рассматриваемом случае *собственными колебаниями* точки и некоторого колебания $x_1 = x_1(t)$, определяемого уравнением (68). Колебание $x_1 = x_1(t)$, соответствующее нулевым начальным условиям

$$x_1 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = 0 \text{ при } t = t_0, \tag{70}$$

называется *чисто вынужденным колебанием*.

Частное решение $x_1 = x_1(t)$ уравнения (68) можно найти методом неопределенных коэффициентов. При этом вид частного решения $x_1 = x_1(t)$ и соответствующего ему колебания существенно зависит от соотношения между частотой ω внешней силы и частотой k собственных колебаний. Различают два случая.

1) $\omega \neq k$. Тогда

$$x_1 = \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t, \tag{71}$$

$$x = A \sin(kt + \varphi) + \frac{M}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \tag{72}$$

2) $\omega = k$ (*резонанс*). В этом случае

$$x_1 = -\frac{M}{2k} t \cos kt, \tag{73}$$

$$x = A \sin(kt + \varphi) - \frac{M}{2k} t \cos kt. \tag{74}$$

Общему решению (74) соответствуют колебания с неограниченно возрастающей амплитудой вследствие наличия в нем так называемого *векового члена* — слагаемого, содержащего множитель t при косинусе.

17. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами во многих случаях может быть проинтегрировано так называемым операционным или операторным методом, который состоит в использовании операционного исчисления для нахождения решений этого уравнения. Этот метод позволяет свести интегрирование дифференциального уравнения к выполнению некоторых чисто алгебраических операций, благодаря чему он получил весьма широкое распространение.

Приведем необходимые сведения из операционного исчисления. При этом нам потребуется понятие об определенном интеграле от комплексной функции вещественной переменной t. Пусть

$$f(t) = u(t) + iv(t), \tag{75}$$

где $u(t)$ и $v(t)$ — вещественные функции от t, определенные в некотором интервале (a, b), конечном или бесконечном в одну или обе стороны. Тогда, по определению, полагают

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt. \tag{76}$$

Нетрудно убедиться, что интегральное исчисление для вещественных функций распространяется на комплексные функции вида (75). Пусть $x(t)$ есть некоторая вещественная или комплексная функция вещественной переменной t, определенная при всех $t \geqslant 0$.

Рассмотрим следующий несобственный интеграл

$$\Phi(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt} dt, \tag{77}$$

зависящий от параметра p, который представляет собой комплексное число, $p = \sigma + i\tau$ (рис. 52). Интеграл (77) называется *интегралом Лапласа*.

Если функция $x(t)$ непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|x(t)| \leqslant Me^{\sigma_0 t} \text{ при всех } t \geqslant 0, \tag{78}$$

где M и σ_0 — вещественные постоянные числа, то интеграл Лапласа сходится при всех значениях p, вещественная часть которых больше σ_0, $\operatorname{Re}(p) = \sigma > \sigma_0$ и, следовательно, представляет собою функцию комплексной переменной p, определенную во всех точках комплексной плоскости (p), лежащих правее прямой $\sigma = \sigma_0$ (рис. 52).

Действительно, оценивая подынтегральную функцию, имеем:

$$|x(t)e^{-pt}| = |x(t)e^{-(\sigma+i\tau)t}| = |x(t)|\,|e^{-\sigma t}|\,|e^{-i\tau t}|. \qquad (79)$$

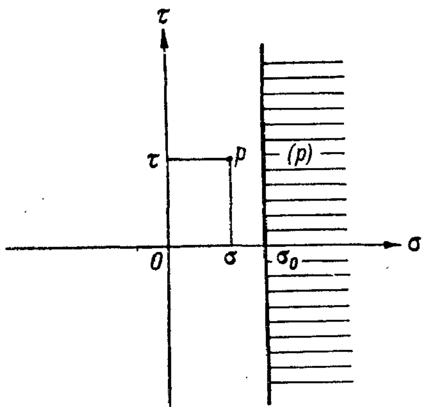

Рис. 52.

Но

$$|e^{-i\tau t}| = |\cos\tau t - i\sin\tau t| = 1,$$
$$|x(t)| \leqslant Me^{\sigma_0 t}. \qquad (80)$$

Поэтому

$$|x(t)e^{-pt}| \leqslant Me^{-(\sigma-\sigma_0)t}. \qquad (81)$$

Так как при $\sigma > \sigma_0$ интеграл

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-\sigma_0)t}dt \qquad (82)$$

сходится, то интеграл (77) тоже сходится при $\sigma > \sigma_0$.

В дальнейшем будем предполагать, что все функции, для которых рассматривается интеграл Лапласа, непрерывны и удовлетворяют условию (78).

Рассмотрим *оператор Лапласа—Карсона*

$$\bar{x}(p) = p\int_0^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt, \qquad (83)$$

отличающийся от интеграла Лапласа только множителем p. Он ставит в соответствие с каждой функцией $x(t)$, удовлетворяющей условию (78), некоторую функцию $\bar{x}(p)$ от комплексной переменной p. Будем называть функцию $\bar{x}(p)$ *изображением* функции $x(t)$, а саму функцию $x(t)$ — *оригиналом* для функции $\bar{x}(p)$. Соответствие между оригиналом и изображением будем символически изображать так:

$$x(t) \leftarrow \bar{x}(p) \quad \text{или} \quad \bar{x}(p) \rightarrow x(t), \qquad (84)$$

где стрелка направлена от изображения к оригиналу. Изображение существует для всякой непрерывной функции $x(t)$, удовлетворяющей условию (78).

Отметим некоторые свойства изображений, которые понадобятся для дальнейшего изложения.

1. Если $x(t) \leftarrow \bar{x}(p)$, то $cx(t) \leftarrow c\bar{x}(p)$ $(c = \text{const})$.

2. Если $x(t) \leftarrow \bar{x}(p)$, $y(t) \leftarrow \bar{y}(p)$, то $x(t) + y(t) \leftarrow \bar{x}(p) + \bar{y}(p)$.

3. Если функция $x(t)$ имеет непрерывную производную $x'(t)$, удовлетворяющую вместе с $x(t)$ условию (78) и $x(t) \leftarrow \bar{x}(p)$, то

$$x'(t) \leftarrow p\bar{x}(p) - px(0). \tag{85}$$

В частности, если $x(0) = 0$, то

$$x'(t) \leftarrow p\bar{x}(p), \tag{86}$$

так что дифференцирование оригинала соответствует умножению изображения на p.

Действительно, имеем:

$$\bar{x}'(p) = p \int_0^{+\infty} x'(t)\, e^{-pt} dt. \tag{87}$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\bar{x}'(p) = p \left[e^{-pt} x(t) \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} x(t) e^{-pt} dt \right]. \tag{88}$$

Так как, в силу оценки (81), функция $e^{-pt}x(t)$ обращается в нуль на верхнем пределе [при $\operatorname{Re}(p) > \sigma_0$], то

$$\bar{x}'(p) = -px(0) + p\bar{x}(p), \text{ или } x'(t) \leftarrow p\bar{x}(p) - px(0). \tag{89}$$

4. Если функция $x(t)$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно [удовлетворяющие вместе с $x(t)$ условию (78)] и $x(t) \leftarrow \bar{x}(p)$, то

$$x^{(n)}(t) \leftarrow p^n \bar{x}(p) - p^n x(0) - p^{n-1} x'(0) - \ldots - px^{(n-1)}(0). \tag{90}$$

В частности, если $x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$x^{(n)}(t) \leftarrow p^n \bar{x}(p). \tag{91}$$

Убедимся, что формула (90) верна при $n = 2$. Имеем:

$$\bar{x}''(p) = p \int_0^{+\infty} x''(t)\, e^{-pt} dt = p \left[x'(t) e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} x'(t)\, e^{-pt} dt \right] =$$

$$= p\,[-x'(0) + p\bar{x}(p) - px(0)] = p^2\bar{x}(p) - p^2 x(0) - px'(0), \tag{92}$$

т. е.

$$\bar{x}''(t) \leftarrow p^2\bar{x}(p) - p^2 x(0) - px'(0). \tag{93}$$

Методом математической индукции убеждаемся, что формула (90) справедлива при любом n.

Приведем таблицу изображений простейших функций, в справедливости которой легко убедиться непосредственными вычислениями.

$x(t)$	$\bar{x}(p)$	$\operatorname{Re}(p)$
C ($C = \text{const}$)	C	$\operatorname{Re}(p) > 0$
t^n (n — натуральное)	$\dfrac{n!}{p^n}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
$e^{\lambda t}$ (λ — const)	$\dfrac{p}{p-\lambda}$	$\operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(\lambda)$
$t^n e^{\lambda t}$ (n — натуральное, λ — const)	$\dfrac{n!\,p}{(p-\lambda)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(\lambda)$
$e^{at}\cos bt$ (a и b — вещественные)	$\dfrac{p(p-a)}{(p-a)^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(p) > a$
$\cos bt$ (b — вещественное)	$\dfrac{p^2}{p^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
$e^{at}\sin bt$ (a и b — вещественные)	$\dfrac{bp}{(p-a)^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(p) > a$
$\sin bt$ (b — вещественное)	$\dfrac{bp}{p^2+b^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
$t\cos bt$ (b — вещественное)	$\dfrac{p(p^2-b^2)}{(p^2+b^2)^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
$t\sin bt$ (b — вещественное)	$\dfrac{2bp^2}{(p^2+b^2)^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
$\operatorname{ch} at$ ($a \geqslant 0$)	$\dfrac{p^2}{p^2-a^2}$	$\operatorname{Re}(p) > a$
$\operatorname{sh} at$ ($a \geqslant 0$)	$\dfrac{ap}{p^2-a^2}$	$\operatorname{Re}(p) > a$

Пользуясь таблицей изображений и установленными выше свойствами изображений, можно найти решение задачи Коши для линейного уравнения с постоянными коэффициентами, если это уравнение однородное или его правая часть может быть представлена в виде суммы функций, содержащихся в таблице, или их линейной комбинации с постоянными коэффициентами.

Пусть дано линейное уравнение

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)\ \left(x^{(k)}=\frac{d^kx}{dt^k}\right), \tag{94}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — постоянные вещественные числа, а функция $f(t)$ задана и непрерывна при $t\geqslant 0$. Поставим начальные условия

$$x=x_0,\ x'=x_0',\ \ldots,\ x^{(n-1)}=x_0^{(n-1)}\quad \text{при } t=0. \tag{95}$$

Пусть $x=x(t)$ есть решение задачи Коши (94)—(95). Это решение существует и единственно. Построим изображение решения $x=x(t)$. С этой целью возьмем изображение обеих частей уравнения (94). Имеем:

$$\overline{x^{(n)}}(p)+a_1\overline{x^{(n-1)}}(p)+\ldots+a_{n-1}\overline{x'}(p)+a_n\overline{x}(p)=\overline{f}(p). \tag{96}$$

Заменяя изображения производных их значениями, согласно формулам (85) и (90), принимая во внимание начальные условия (95), получим:

$$\begin{gathered}p^n\overline{x}(p)-p^nx_0-p^{n-1}x_0'-\ldots-px_0^{(n-1)}+\\+a_1\left[p^{n-1}\overline{x}(p)-p^{n-1}x_0-p^{n-2}x_0'-\ldots-px_0^{(n-2)}\right]+\ldots+\\+a_{n-1}\left[p\overline{x}(p)-px_0\right]+a_n\overline{x}(p)=\overline{f}(p).\end{gathered} \tag{97}$$

Собрав члены, содержащие $\overline{x}(p)$, и перенеся все остальные члены в правую часть, получим

$$(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)\,\overline{x}(p)=\overline{f}(p)+\psi(p), \tag{98}$$

где

$$\begin{gathered}\psi(p)=p^n x_0+p^{n-1}x_0'+\ldots+px_0^{(n-1)}+\\+a_1\left[p^{n-1}x_0+p^{n-2}x_0'+\ldots+px_0^{(n-2)}\right]+\ldots+a_{n-1}px_0.\end{gathered} \tag{99}$$

Заметим, что коэффициент при $\overline{x}(p)$ совпадает с левой частью характеристического уравнения для уравнения (94). Пользуясь прежним обозначением

$$P(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n, \tag{100}$$

запишем уравнение (98) в виде

$$P(p)\overline{x}(p)=\overline{f}(p)+\psi(p). \tag{101}$$

Это уравнение называется *вспомогательным уравнением* для задачи Коши (94) — (95) или *операторным уравнением*, соответствующим этой задаче. Из уравнения (101) находим изображение искомого решения:

$$\overline{x}(p)=\frac{\overline{f}(p)+\psi(p)}{P(p)}. \tag{102}$$

Восстанавливая по этому изображению оригинал, получим искомое решение $x=x(t)$.

Отметим, что формула (102) для изображения решения принимает наиболее простой вид, если решение удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$x=0,\ x'=0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}=0 \text{ при } t=0. \tag{103}$$

В этом случае будем иметь:

$$\overline{x}(p)=\frac{\overline{f}(p)}{P(p)}. \tag{104}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+x=\sin t\left(\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}\right). \tag{105}$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x=0,\ \frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2} \text{ при } t=0. \tag{106}$$

Возьмем изображения обеих частей уравнения. Так как

$$\overline{x}''(p)=p^2\,\overline{x}(p)-p^2x(0)-px'(0)=p^2\overline{x}(p)+\frac{1}{2}p, \tag{107}$$

а изображением функции $\sin t$ является, согласно приведенной выше таблице, функция $\frac{p}{p^2+1}$, то будем иметь:

$$p^2\,\overline{x}(p)+\frac{1}{2}p+\overline{x}(p)=\frac{p}{p^2+1}, \tag{108}$$

или

$$(p^2+1)\,\overline{x}(p)=\frac{p(1-p^2)}{2(p^2+1)}, \tag{109}$$

откуда

$$\overline{x}(p)=\frac{p(1-p^2)}{2(p^2+1)^2}. \tag{110}$$

Ищем в таблице изображение, совпадающее с этим изображением или хотя бы близкое к нему. Видим, что функция (110) является изображением функции $t\cos t$ с точностью до множителя $-\frac{1}{2}$. Поэтому искомым решением будет

$$x(t)=-\frac{1}{2}t\cos t. \tag{111}$$

Пример 2. Найти решение уравнения

$$\ddot{x}-x=\frac{1}{2}e^t, \tag{112}$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$x=0,\ \frac{dx}{dt}=0 \text{ при } t=0. \tag{113}$$

Составим вспомогательное уравнение, пользуясь формулой (101) и таблицей изображений. Получим:

$$(p^2-1)\overline{x}(p)=\frac{p}{2(p-1)}, \tag{114}$$

откуда

$$\frac{\overline{x}(p)}{p} = \frac{1}{2(p-1)^2(p+1)}. \tag{115}$$

Разложим правую часть на простейшие рациональные дроби:

$$\frac{\overline{x}(p)}{p} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p+1}\right]. \tag{116}$$

Поэтому

$$\overline{x}(p) = \frac{1}{4}\left[\frac{p}{(p-1)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{p}{p-1} + \frac{1}{2}\,\frac{p}{p+1}\right]. \tag{117}$$

Пользуясь таблицей изображений, получим:

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(te^t - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}\right). \tag{118}$$

Пример 3. Найти решение уравнения

$$x''' - x = 0, \tag{119}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = 1,\ x' = 1,\ x'' = 1 \text{ при } t = 0. \tag{120}$$

Для составления вспомогательного уравнения воспользуемся формулой (101). В нашем случае $\overline{f}(p) \equiv 0$, $P(p) = p^3 - 1$, $\psi(p) = p^3 + p^2 + p$. Поэтому вспомогательным уравнением будет:

$$(p^3 - 1)\,\overline{x}(p) = p^3 + p^2 + p, \tag{121}$$

откуда

$$\overline{x}(p) = \frac{p}{p-1}. \tag{122}$$

Искомым решением будет

$$x = e^t. \tag{123}$$

§ 5. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДИМЫЕ К УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

18. Одним из приемов, позволяющих во многих случаях привести однородное линейное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = 0 \tag{1}$$

к уравнению с постоянными коэффициентами, является замена независимой переменной, которая, как отмечено в п. **3**, не нарушает ни линейности, ни однородности данного уравнения. Н. П. Еругин показал, что если такое приведение возможно, то только при помощи подстановки*

$$t = c\int \sqrt[n]{p_n(x)}\cdot dx \quad (c = \text{const}), \tag{2}$$

* См.: Н. П. Еругин. Приводимые системы. Труды Физико-математического ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946, стр. 92.

которая приводит уравнение (1) к уравнению с постоянным коэффициентом при искомой функции.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'' - \frac{1}{x} y' + 4x^2 y = 0. \tag{3}$$

Подстановка (2) принимает вид

$$t = c \int \sqrt{4x^2}\, dx, \tag{4}$$

откуда, полагая $c = 1$, находим (опуская произвольную постоянную интегрирования):

$$t = x^2. \tag{5}$$

Выполняя эту подстановку, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot 2x, \\ y''_{x^2} &= y''_{t^2} \cdot 4x^2 + 2y'_t. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставляя (6) в уравнение (3), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$y''_{t^2} + y = 0, \tag{7}$$

откуда

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t. \tag{8}$$

Следовательно,

$$y = C_1 \cos x^2 + C_2 \sin x^2 \tag{9}$$

есть общее решение уравнения (3).

19. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{10}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — постоянные вещественные числа, называется *уравнением Эйлера*.

Если сделать коэффициент при $y^{(n)}$ равным единице, т. е. переписать уравнение Эйлера в виде

$$y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} y' + \frac{a_n}{x^n} y = 0, \tag{11}$$

то точка $x = 0$ обращает в бесконечность все коэффициенты полученного уравнения, кроме первого. Будем называть точку $x = 0$ *особой точкой* уравнений (10) и (11). Покажем, что уравнение Эйлера всегда приводится к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи соответствующей замены независимой переменной.

Подстановка (2) при $x > 0$ принимает вид

$$t = c \int \sqrt[n]{\frac{a_n}{x^n}}\, dx = \ln x \tag{12}$$

$\left(\text{полагаем } c = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right.$ и опускаем произвольную постоянную интегрирования$\left.\vphantom{\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}}\right)$, откуда

$$x = e^t. \tag{13}$$

Выразим производные от y по x через производные от y по t:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = y'_t \cdot e^{-t}, \\ \frac{d}{dx} &= \frac{d}{dt}e^{-t}, \\ y''_{x^2} &= (y''_{t^2}e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)}_{x^n} &= \varphi(y'_t, \dots, y^{(n)}_{t^n})e^{-nt}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Выполняя теперь в уравнении (10) подстановку (13), видим, что степени x $(x = e^t)$ взаимно уничтожатся со степенями e^{-t}, и мы получим однородное линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}y' + b_n y = 0. \tag{15}$$

Найдя общее решение уравнения (15) и заменив в нем t на $\ln x$, придем к общему решению уравнения Эйлера в области

$$0 < x < +\infty, \ |y| < +\infty, \ |y'| < +\infty, \ \dots, \ |y^{(n-1)}| < +\infty.$$

Для отрицательных значений x при помощи подстановки $x = -e^t$ получим тот же аналитический вид общего решения.

Так как фундаментальная система решений уравнения (15) состоит из функций вида

$$\begin{matrix} e^{\lambda_1 t}, \ e^{at}\cos bt, \ e^{at}\sin bt; \\ t^m e^{\lambda_1 t}, \ t^m e^{at}\cos bt, \ t^m e^{at}\sin bt, \end{matrix} \tag{16}$$

то фундаментальная система решений уравнения Эйлера состоит из функций вида

$$\begin{matrix} x^{\lambda_1}, \ x^a\cos(b\ln x), \ x^a\sin(b\ln x); \\ x^{\lambda_1}\cdot(\ln x)^m, \ x^a\cos(b\ln x)\cdot(\ln x)^m, \ x^a\sin(b\ln x)\cdot(\ln x)^m. \end{matrix} \tag{17}$$

Уравнение вида

$$\begin{aligned} (ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \\ + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи подстановки

$$|ax+b| = e^t. \tag{19}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0. \tag{20}$$

Полагая $x = e^t$, имеем:

$$\begin{array}{r|l} 6\cdot & y = y \\ (-4x)\cdot & y'_x = y'_t\, e^{-t} \\ x^2\cdot & y''_{x^2} = \left(y''_{t^2} - y'_t\right) e^{-2t} \\ \hline \end{array}$$

$$y''_{t^2} - 5y'_t + 6y = 0, \tag{21}$$

откуда

$$y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}. \tag{22}$$

Следовательно,

$$y = C_1x^2 + C_2x^3 \tag{23}$$

есть общее решение уравнения (20).

Фундаментальной системой решений уравнения (20) будет

$$y_1 = x^2, \ y_2 = x^3. \tag{24}$$

Заметим, что она состоит из функций, конечных в особой точке $x = 0$ и даже голоморфных в окрестности этой особой точки. Вронскиан решений (24) равен x^4. Он обращается в нуль в точке $x = 0$. Это не противоречит теории, ибо точка $x = 0$ особая.

Пример 2. Пусть дано уравнение

$$x^2y'' + 3xy' - y = 0 \tag{25}$$

Выполняя подстановку $x = e^t$, получим:

$$y''_{t^2} + 2y'_t + y = 0, \tag{26}$$

откуда

$$y = \frac{1}{x}(C_1 + C_2 \ln x). \tag{27}$$

Фундаментальной системой решений уравнения (25) будет

$$y_1 = \frac{1}{x}, \ y_2 = \frac{\ln x}{x}. \tag{28}$$

Здесь оба решения стремятся к бесконечности, когда x стремится к особой точке $x = 0$.

Пример 3. Для уравнения

$$x^2y'' + xy' + y = 0 \tag{29}$$

имеем:

$$\begin{gathered} x = e^t, \ y''_{t^2} + y = 0, \ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x. \end{gathered} \tag{30}$$

Неоднородное уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x) \tag{31}$$

всегда интегрируется в квадратурах (почему?). Если $f(x) = P(\ln x)\, x^{\alpha}$, где P — полином, то оно интегрируется в элементарных функциях (почему?).

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$xy'' + y' - \frac{1}{x} y = 4. \tag{32}$$

Умножая обе части на x, получим неоднородное уравнение Эйлера

$$x^2y'' + xy' - y = 4x. \tag{33}$$

Полагая $x = e^t$, придем к уравнению:

$$y'' - y = 4e^t. \tag{34}$$

Это уравнение имеет частное решение

$$y_1 = 2te^t \tag{35}$$

(почему?). Поэтому

$$\left.\begin{aligned} y &= 2te^t + C_1e^t + C_2e^{-t} \\ y &= 2x\ln x + C_1x + \frac{C_2}{x}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

20. *Уравнение Чебышева*

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' + n^2y = 0 \tag{37}$$

подстановкой

$$t = c\int \sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}}\, dx = \arccos x \tag{38}$$

или

$$x = \cos t \tag{39}$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$y''_{t^2} + n^2y = 0 \tag{40}$$

(почему?). Поэтому общим решением уравнения Чебышева (37) будет

$$y = C_1 \cos n \arccos x + C_2 \sin n \arccos x. \tag{41}$$

Если n — целое, то частное решение

$$y_1 = \cos n \arccos x \tag{42}$$

есть полином степени n (почему?). Он называется полиномом Чебышева и обозначается через T_n:

$$T_n = \cos n \arccos x. \tag{43}$$

Полином Чебышева представляет собой решение уравнения Чебышева, конечное в особых точках $x = \pm 1$.

21. Для приведения однородного линейного уравнения (1) к уравнению с постоянными коэффициентами можно наряду с заменой независимой переменной использовать однородную линейную замену искомой функции

$$y = \alpha(x)\, z, \tag{44}$$

которая тоже не нарушает ни линейности, ни однородности уравнения (1).

Пример. Уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0 \tag{45}$$

при помощи подстановки

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}z \tag{46}$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z'' + z = 0 \tag{47}$$

(почему?). Поэтому

$$y = C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \tag{48}$$

будет общим решением уравнения (45).

§ 6. ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

22. Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого непрерывны в интервале (a, b). Покажем, что при помощи подстановки вида

$$y = \alpha(x)z, \tag{2}$$

где z — новая неизвестная функция, уравнение (1) можно привести к виду, не содержащему члена с первой производной.

Действительно, выполняя в уравнении (1) подстановку (2), получим:

$$\alpha''z + 2\alpha'z' + \alpha z'' + p(\alpha'z + \alpha z') + q\alpha z = 0. \tag{3}$$

Приравнивая нулю сумму коэффициентов при z', имеем:

$$2\alpha' + p\alpha = 0, \tag{4}$$

откуда

$$\alpha(x) = e^{-\int\frac{p(x)}{2}dx} \quad (C = 1). \tag{5}$$

Подставляя это значение $\alpha(x)$ в (2), получим искомую подстановку

$$y = e^{-\int\frac{p(x)}{2}}z. \tag{6}$$

При помощи этой подстановки уравнение (1) преобразуется к виду

$$z'' + I(x)z = 0, \tag{7}$$

где

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x). \tag{8}$$

Может оказаться, что $I(x) = \text{const}$ или $I(x) = \frac{k}{(x-a)^2}$. Тогда уравнение (7) интегрируется в элементарных функциях (почему?), а уравнение (1) — в квадратурах.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y'' + xy' + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right) y = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$I(x) = -1, \tag{10}$$

поэтому подстановка

$$y = e^{-\frac{x^2}{4}} z \tag{11}$$

приводит уравнение (9) к виду

$$z'' - z = 0. \tag{12}$$

Общим решением уравнения (9) будет

$$y = e^{-\frac{x^4}{4}} (C_1 e^x + C_2 e^{-x}). \tag{13}$$

23. Уравнение вида

$$p(x) y'' + p'(x) y' + q(x) y = 0 \text{ или } [p(x) y']' + q(x) y = 0, \tag{14}$$

в котором коэффициент при y' есть производная от коэффициента при y'', называется *самосопряженным уравнением второго порядка.* Примером самосопряженного уравнения является уравнение *Лежандра*

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0. \tag{15}$$

Уравнение *Бесселя*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 \tag{16}$$

не самосопряженное, но легко приводится к самосопряженному виду. Для этого достаточно умножить обе части его на $\frac{1}{x}$. Получим:

$$xy'' + y' + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0. \tag{17}$$

Покажем, что *всякое однородное линейное уравнение второго порядка*

$$p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \tag{18}$$

может быть приведено к самосопряженному виду.

В самом деле, умножая обе части уравнения (18) на функцию $\mu = \mu(x)$, имеем:

$$\mu p_0 y'' + \mu p_1 y' + \mu p_2 y = 0. \tag{19}$$

Это уравнение будет самосопряженным, если μ удовлетворяет условию

$$\mu p_1 = (\mu p_0)' \text{ или } p_0\mu' + (p_0' - p_1)\mu = 0, \tag{20}$$

откуда

$$\mu = \frac{1}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} \quad (C = 1). \tag{21}$$

При таком выборе функции μ уравнение (19) примет следующий самосопряженный вид:

$$[p(x)y']' + q(x)y = 0, \tag{22}$$

где

$$p(x) = e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}, \quad q(x) = \frac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}. \tag{23}$$

Пример. Привести уравнение Чебышева

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 \tag{24}$$

к самосопряженному виду.

Имеем:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 - x^2} e^{\int \frac{-x}{1 - x^2} dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{25}$$

Самосопряженным видом уравнения Чебышева будет

$$(\sqrt{1 - x^2}\, y')' + \frac{n^2}{\sqrt{1 - x^2}} y = 0. \tag{26}$$

24. Пусть дано однородное линейное уравнение второго порядка

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{27}$$

Покажем, что *если известно ненулевое частное решение $y_1 = y_1(x)$ этого уравнения, т. е. $y_1(x) \not\equiv 0$ и $L(y_1) = 0$, то его порядок можно понизить на единицу, не нарушая линейности.*

Действительно, полагая

$$y = y_1 z, \tag{28}$$

где z — новая неизвестная функция, имеем:

$$\begin{array}{r|l} q(x)\cdot & y = y_1 z \\ p(x)\cdot & y' = y_1' z + y_1 z' \\ 1\cdot & y'' = y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' \\ \hline & L(y_1) z + (2y_1' + py_1) z' + y_1 z'' = 0, \end{array}$$

или

$$y_1 z'' + (2y_1' + py_1) z' = 0. \tag{29}$$

Так как это уравнение не содержит искомой функции, то его порядок понижается на единицу при помощи подстановки

$$z' = u, \tag{30}$$

где u — новая неизвестная функция. Получаем:

$$y_1 u' + (2y_1' + py_1)\, u = 0. \tag{31}$$

Таким образом, подстановка

$$y = y_1 \int u\,dx \tag{32}$$

приводит уравнение (27) к однородному линейному уравнению первого порядка (31).

Интегрируя уравнение (31), находим:

$$u = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int p\,dx}. \tag{33}$$

Полагая $C = 1$ и подставляя полученное решение u в (32), найдем решение данного уравнения (27):

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx, \tag{34}$$

которое, очевидно, линейно независимо с частным решением y_1. Общим решением уравнения (27) будет

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{35}$$

Отметим, что формула (34) полезна и в тех случаях, когда y_1 не является элементарной функцией, ибо дает возможность по аналитической структуре одного частного решения $y_1 = y_1(x) \not\equiv 0$ и коэффициента $p(x)$ установить аналитическую структуру второго частного решения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$(x\cos x - \sin x)\, y'' + x \sin x \cdot y' - \sin x \cdot y = 0. \tag{36}$$

Это уравнение имеет, очевидно, частное решение $y_1 = x$. Найдем второе частное решение по формуле (34). Имеем:

$$y_2 = \int \frac{e^{-\int \frac{x\sin x}{x\cos x - \sin x}dx}}{x^2}\,dx =$$

$$= x \int \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = \sin x, \quad y_2 = \sin x. \tag{37}$$

Следовательно,

$$y = C_1 x + C_2 \sin x. \tag{38}$$

Порядок уравнения (27) можно понизить на единицу и не зная (ненулевого) частного решения его, если воспользоваться способом понижения порядка уравнений, однородных относительно искомой функции и ее производных (см. гл. III, п. **14**), но при этом линейность уравнения будет нарушена.

Положим в уравнении (27)

$$y' = yz, \tag{39}$$

где z — новая неизвестная функция. Получим уравнение Риккати:

$$z' = -z^2 - p(x)z - q(x). \tag{40}$$

Но уравнение Риккати интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях. Поэтому выполненное понижение порядка не обеспечивает (в отличие от понижения порядка в случае, когда известно одно частное решение) интегрируемости однородного линейного уравнения в квадратурах.

Тем не менее приведение однородного линейного уравнения второго порядка к уравнению Риккати имеет большое значение в теории дифференциальных уравнений, ибо дает возможность судить о свойствах решений уравнения (27) по известным свойствам решений уравнения Риккати (40).

Обратно, всякое уравнение Риккати

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{41}$$

может быть приведено к однородному линейному уравнению второго порядка при помощи подстановки

$$y = -\frac{1}{P(x)}\frac{z'}{z}, \tag{42}$$

где z — новая неизвестная функция.

В самом деле, выполняя в уравнении (41) подстановку (42), имеем:

$$\frac{P'(x)}{P^2(x)}\frac{z'}{z} - \frac{1}{P(x)}\frac{z''z - z'^2}{z^2} = P(x)\left[-\frac{1}{P(x)}\frac{z'}{z}\right]^2 - \frac{Q(x)}{P(x)}\frac{z'}{z} + R(x). \tag{43}$$

Члены, содержащие z'^2, взаимно уничтожаются, и мы получим однородное линейное уравнение второго порядка:

$$z'' - \left[\frac{P'(x)}{P(x)} + Q(x)\right]z' + P(x)R(x)z = 0. \tag{44}$$

Формула (42) дает возможность делать заключения о свойствах решений уравнения Риккати по известным свойствам решений соответствующего однородного линейного уравнения второго порядка (44).

Отметим, что, в частности, уравнению Риккати в *канонической* форме

$$y' = y^2 + R(x) \tag{45}$$

соответствует, в силу подстановки

$$y = -\frac{z'}{z}, \tag{46}$$

однородное линейное уравнение второго порядка

$$z'' + P(x)z = 0. \tag{47}$$

Обратно, однородному линейному уравнению второго порядка, не содержащему члена с первой производной,

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{48}$$

соответствует, в силу подстановки

$$\frac{y'}{y} = -z, \tag{49}$$

каноническое уравнение Риккати:

$$z' = z^2 + q(x). \tag{50}$$

Из подстановки (49) видно, что если в однородном линейном уравнении второго порядка (48) коэффициент $q(x)$ непрерывен в (a, b) и его частное решение $y_1 = y_1(x)$ не обращается в нуль внутри (a, b), то соответствующее ему частное решение $z_1 = z_1(x)$ уравнения Риккати (50) будет определено и непрерывно во всем интервале (a, b) и, следовательно, ограничено в любом замкнутом интервале $[a_1, b_1]$, лежащем внутри (a, b).

Пример 2. Рассмотрим однородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' - y = 0. \tag{51}$$

Ему соответствует, в силу (49), уравнение Риккати:

$$z' = z^2 - 1. \tag{52}$$

Возьмем $y_1 = e^x$. Это решение определено при всех x и не обращается в нуль. Поэтому соответствующее решение уравнения (52) $z_1 = -1$ должно быть определено при всех x, что в действительности и имеет место.

25. Если коэффициенты уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{53}$$

голоморфны в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$, то, согласно теореме Коши, существует единственное решение, голоморфное, по крайней мере, в той же окрестности точки $x = x_0$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$y = y_0, \quad y' = y'_0 \quad \text{при } x = x_0, \tag{54}$$

где числа y_0 и y'_0 можно задавать произвольно. Это решение представимо, таким образом, в виде степенного ряда

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \tag{55}$$

сходящегося, по крайней мере, в области $|x - x_0| < \rho$.

Обычно строят фундаментальную систему голоморфных решений, нормированную в точке $x=x_0$:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=1+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k,\\ y_2&=x-x_0+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Тогда формула

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{57}$$

даст голоморфное общее решение уравнения (53) в области

$$|x-x_0|<\rho,\quad |y|<+\infty,\quad |y'|<+\infty. \tag{58}$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y''+(2-4x^2)\,y=0. \tag{59}$$

Так как коэффициент при y есть целая функция от x, то уравнение (59) имеет решение с любыми начальными данными x_0, y_0, y_0', и это решение будет целой функцией от x.

Построим фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x=0$, в виде рядов по степеням x:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=1+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(1)} x^k,\\ y_2&=x+\sum_{k=2}^{\infty} c_k^{(2)} x^k. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Ряды справа заведомо сходятся при всех x. Остается только определить коэффициенты. Их можно найти одним из методов, указанных в гл. V, п. 21. Получим:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{k!}+\ldots,\\ y_2&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{30}x^5-\frac{3}{70}x^7+\ldots \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Следовательно,

$$y=C_1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots\right)+C_2\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{30}x^5-\frac{3}{70}x^7+\ldots\right) \tag{62}$$

будет общим решением уравнения (59).

Заметим, что это общее решение можно записать в конечном виде, так как ряд, представляющий решение y_1, легко суммируется. Его сумма равна e^{-x^2}. Поэтому

$$x_2=e^{-x^2}\int_0^x e^{2x^2}\,dx. \tag{63}$$

Общее решение (62) запишется так:

$$y = e^{-x^2}\left(C_1 + C_2\int_0^x e^{2x^2}dx\right). \tag{64}$$

26. Если коэффициенты уравнения (53) не голоморфны ни в какой окрестности точки $x=x_0$, то точка $x=x_0$ называется *особой точкой* этого уравнения. В общем случае нельзя гарантировать существование решений голоморфных в окрестности особой точки $x=x_0$. Зато в окрестности особой точки $x=x_0$ во многих случаях удается найти решение в виде так называемого *обобщенного степенного ряда*

$$y = (x-x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k \quad (c_0 \neq 0), \tag{65}$$

представляющего собой произведение обычного сходящегося степенного ряда по степеням $x-x_0$ на множитель $(x-x_0)^\rho$, где ρ — некоторое постоянное число. Если ρ есть целое положительное число или нуль, то обобщенный степенной ряд (65) обращается в обычный степенной ряд и мы получаем решение голоморфное в окрестности точки $x=x_0$.

Для доказательства существования решения в виде обобщенного степенного ряда нужно предположить, что сами коэффициенты уравнения разлагаются в обобщенные степенные ряды.

Теорема. *Если в уравнении* (53),

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представимы в виде отношений степенных рядов по степеням разности $x-x_0$ соответственно к первой и второй степеням этой разности

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k (x-x_0)^k}{x-x_0}, \quad q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_k (x-x_0)^k}{(x-x_0)^2}, \tag{66}$$

где коэффициенты p_0, q_0 и q_1 не равны нулю одновременно, а ряды в числителях сходятся в области $|x-x_0|<R$, то существует, по крайней мере, одно решение уравнения (53) *в виде обобщенного степенного ряда* (65), *где степенной ряд, входящий в правую часть, сходится, по крайней мере, в той же области $|x-x_0|<R$, что и ряды в числителях разложений* (66).

Особая точка $x=x_0$, в окрестности которой коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ представимы в виде (66), называется в аналитической теории дифференциальных уравнений *регулярной* особой точкой.

Не имея возможности дать доказательство этой теоремы, ограничимся краткими указаниями относительно способа нахождения показателя ρ и коэффициентов c_k, а также вида второго частного решения.

Число ρ должно быть корнем уравнения

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0, \tag{16}$$

которое называется *определяющим уравнением* в особой точке $x=x_0$.

Обозначим корни уравнения (16) через ρ_1 и ρ_2, причем будем считать, что $\rho_1 \geqslant \rho_2$ [или $\operatorname{Re}(\rho_1) \geqslant \operatorname{Re}(\rho_2)$, если ρ_1 и ρ_2 комплексные].

Если корни определяющего уравнения различны, но их разность $\rho_1-\rho_2$ не равна целому положительному числу, то мы найдем два линейно независимых частных решения вида (13):

$$\left.\begin{aligned} y_1&=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k \quad \left(c_0^{(1)}\neq 0\right),\\ y_2&=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k \quad \left(c_0^{(2)}\neq 0\right). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Коэффициенты $c_k^{(1)}$ и $c_k^{(2)}$ определяются подстановкой y_1 и y_2 в уравнение (14), после предварительного умножения обеих частей его на $(x-x_0)^2$. При этом $c_0^{(1)}$ и $c_0^{(2)}$ остаются произвольными.

Если $\rho_1-\rho_2$ есть целое положительное число, то мы можем построить частное решение, соответствующее корню ρ_1:

$$y_1=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)}(x-x_0)^k \quad \left(c_0^{(1)}\neq 0\right). \tag{18}$$

Что касается второго частного решения, то, используя формулу

$$y_2=y_1\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx, \tag{19}$$

можно показать, что оно имеет вид

$$y_2=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)}(x-x_0)^k+\gamma_{-1}y_1\ln(x-x_0). \tag{20}$$

При этом может получиться, что $\gamma_{-1}=0$, и тогда мы получим второе решение тоже в виде обобщенного степенного ряда.

Наконец, если $\rho_1 - \rho_2 = 0$, то одно частное решение имеет вид (18), а второе частное решение, так же как и в предыдущем случае, получается в виде:

$$y_2 = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k + \gamma_{-1} y_1 \ln (x - x_0), \qquad (21)$$

но здесь всегда $\gamma_{-1} \neq 0$.

Таким образом, *в случае равных корней определяющего уравнения, второе частное решение обязательно содержит* $\ln (x - x_0)$.

Простейшим примером уравнения типа (14) является уравнение Эйлера

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0. \qquad (22)$$

27. Рассмотрим уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0, \qquad (23)$$

где n — постоянное неотрицательное число.

Здесь $x = 0$ — регулярная особая точка (почему?). Построим два линейно независимых частных решения в окрестности этой особой точки.

Определяющим уравнением в особой точке $x = 0$ будет

$$\rho^2 - n^2 = 0 \qquad (24)$$

(почему?). Его корни: $\rho_1 = n$, $\rho_2 = -n$.

Построим решение, соответствующее корню $\rho_1 = n$. Имеем:

$$y_1 = x^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{n+k}, \qquad (25)$$

где степенной ряд, входящий в правую часть, заведомо сходится при всех x (почему?).

Подставляя (25) в (23) и сокращая на x^n, имеем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (n + k)(n + k - 1) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (n + k) x^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} - n^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0, \qquad (26)$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(n + k)^2 - n^2] c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2} = 0. \qquad (27)$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях x:

$$\left.\begin{array}{l} x^0: (n^2-n^2)c_0=0, \\ x\ : [(n+1)^2-n^2]\, c_1=0, \\ x^k: [(n+k)^2-n^2]\, c_k+c_{k-2}=0 \quad (k\geqslant 2). \end{array}\right\} \tag{28}$$

Отсюда следует, что коэффициент c_0, как всегда, произволен. Так как коэффициент при c_1 отличен от нуля, то $c_1=0$. Далее, имеем:

$$c_k=-\frac{c_{k-2}}{k(2n+k)} \quad (k\geqslant 2). \tag{29}$$

Поэтому все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю:

$$c_1=c_3=c_5=\ldots=c_{2k+1}=\ldots=0. \tag{30}$$

Для коэффициентов при четных степенях x имеем рекуррентную формулу

$$c_{2k}=-\frac{c_{2k-2}}{2^2\cdot k(n+k)}. \tag{31}$$

Следовательно, все эти коэффициенты могут быть выражены через c_0. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} c_2=-\dfrac{c_0}{2^2\cdot 1\cdot(n+1)}, \\ c_4=-\dfrac{c_2}{2^2\cdot 2\cdot(n+2)}=\dfrac{c_0}{2^4\cdot 2!\cdot(n+1)(n+2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{2k}=(-1)^k\dfrac{c_0}{2^{2k}\cdot k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}. \end{array}\right\} \tag{32}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (25), получим решение:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k c_0}{2^{2k}\cdot k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\,x^{n+2k}. \tag{33}$$

Это есть решение уравнения Бесселя при любом c_0. Прежде чем выбрать значение c_0, перепишем решение (33) так:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k c_0\cdot 2^n}{k!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{34}$$

Желая иметь наиболее простой вид коэффициентов и вспоминая, что *гамма-функция*

$$\Gamma(a)\doteq\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx \quad (a>0) \tag{35}$$

обладает свойством

$$a\Gamma(a)=\Gamma(a+1), \tag{36}$$

положим

$$c_0=\frac{1}{2^n\cdot\Gamma(n+1)}\,. \tag{37}$$

Тогда получим частное решение уравнения Бесселя в виде

$$y_1=J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}, \tag{38}$$

где ряд справа сходится при всех x (почему?). Функция $J_n(x)$ называется *Бесселевой функцией первого рода n-го порядка.*

В частности, функция Бесселя первого рода нулевого порядка, т. е. первое частное решение уравнения Бесселя при $n=0$,

$$xy''+y'+xy=0, \tag{39}$$

имеет вид

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{40}$$

Если n не равно нулю и не является целым положительным числом, то хотя число $s=\rho_1-\rho_2=2n$ может быть целым, бо́льшим нуля, второе частное решение уравнения Бесселя не будет содержать $\ln x$, ибо нахождение этого решения в виде

$$y=x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{-n+k} \tag{41}$$

может быть сведено к замене n на $-n$, и мы получим

$$y_2=J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}. \tag{42}$$

Заметим, что функция $J_{-n}(x)$ в отличие от $J_n(x)$ не является конечной в особой точке $x=0$: она обращается в бесконечность при $x=0$.

Частные решения $y_1=J_n(x)$ и $y_2=J_{-n}(x)$ линейно независимы. Поэтому общим решением уравнения Бесселя в рассматриваемом случае будет

$$y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)\quad (n \text{ — не целое число}). \tag{43}$$

Рассмотрим теперь случай, когда n есть целое положительное число. Тогда первое частное решение $y_1=J_n(x)$ есть обычный степенной ряд.

$$y_1 = J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \qquad (44)$$

При нахождении второго частного решения мы встретим затруднение: хотя из формулы (42) следует, что решение $y_2 = J_{-n}(x)$ сохранит смысл и при целом n, если принять во внимание, что гамма-функция обращается в бесконечность, когда ее аргумент равен нулю или целому отрицательному числу, но это решение не будет линейно независимым с первым решением.

В самом деле, при n — целом положительном мы имеем:

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(-n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} \qquad (45)$$

[суммирование начинается с $k=n$ вследствие того, что $\Gamma(-n+k+1) = \infty$ при $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$]. Заменяя индекс суммирования k на $k+n$, перепишем (45) в виде

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} \frac{1}{(k+n)!\,(-n+k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2(k+n)} =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+n)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} = (-1)^n J_n(x), \qquad (46)$$

так что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (n \text{ — целое положительное}), \qquad (47)$$

т. е. функции $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ линейно зависимы.

В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что в качестве второго частного решения можно взять функцию

$$Y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(k+n)!} \left[2 \ln \frac{x}{2} + 2C - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n+k} \frac{1}{\nu}\right] -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}, \qquad (48)$$

где $C = 0{,}5772157\ldots$ — *постоянная Эйлера*, а $\sum_{\nu=1}^{0} \frac{1}{\nu} = 0$. Эта функция называется *функцией Бесселя второго рода n-го порядка*. Функция $Y_n(x)$ очевидно обращается в бесконечность в особой точке $x=0$.

Иногда оказывается целесообразнее в качестве второго частного решения рассматривать функцию $\frac{1}{\pi} Y_n(x)$. Эта функция называется *функцией Вебера n-го порядка*.

Общее решение уравнения Бесселя в случае, когда n есть целое положительное число, имеет вид

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x). \tag{49}$$

В случае $n=0$, т. е. для уравнения Бесселя вида (39), в качестве второго частного решения можно взять

$$Y_0(x) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[\ln\frac{x}{2} + C - \sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu}\right]. \tag{50}$$

Функция $Y_0(x)$, очевидно, обращается в бесконечность в особой точке $x=0$. Иногда вместо $Y_0(x)$ берут функцию $\frac{1}{\pi} Y_0(x)$. Эта функция называется *функцией Вебера нулевого порядка*.

Общим решением уравнения Бесселя в случае $n=0$ является

$$y = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x). \tag{51}$$

Функции Бесселя не являются, вообще говоря, элементарными функциями. Но можно доказать, что $J_{\frac{2k+1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{2k+1}{2}}(x)$ выражаются через элементарные функции. В частности,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{52}$$

28. *Уравнение Гаусса или гипергеометрическое дифференциальное уравнение* имеет вид:

$$x(x-1)y'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)x]y' + \alpha\beta y = 0, \tag{53}$$

где α, β и γ — постоянные числа. Здесь $x=0$ и $x=1$ регулярные особые точки (почему?).

Построим линейно независимые частные решения уравнения Гаусса в окрестности особой точки $x=0$ в предположении, что γ не равно ни целому положительному числу, ни нулю.

Определяющим уравнением в особой точке $x=0$ будет

$$\rho(\rho-1) + \gamma\rho = 0 \tag{54}$$

(почему?). Его корни $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1-\gamma$. Так как их разность в силу сделанного предположения относительно γ не является целым числом, то оба решения можно найти в виде обобщенных степенных рядов.

Найдем решение, соответствующее нулевому корню $\rho_1=0$. Оно является обычным степенным рядом:

$$y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad (c_0\neq 0), \tag{55}$$

т. е. голоморфно в окрестности особой точки $x=0$, причем ряд (55) заведомо сходится при $|x|<1$ (почему?). Подставляя ряд (55) в уравнение (53), имеем:

$$x(x-1)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+$$
$$+[-\gamma+(1+\alpha+\beta)x]\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}+\alpha\beta\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0. \tag{56}$$

Приравняем нулю коэффициенты при всех степенях x:

$$\left.\begin{aligned}
&x^0:\ -\gamma\cdot 1\cdot c_1+\alpha\beta c_0=0, \quad c_1=\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}c_0;\\
&x^k: k(k-1)c_k-(k+1)kc_{k+1}-\gamma(k+1)c_{k+1}+\\
&\qquad +(1+\alpha+\beta)kc_k+\alpha\beta c_k=0,\\
&(a+k)(\beta+k)c_k=(k+1)(\gamma+k)c_{k+1},\\
&c_{k+1}=\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)}c_k.
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Полагая $c_0=1$, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&c_1=\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma},\quad c_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2\cdot(\gamma+1)}c_1=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)},\ \ldots,\\
&c_k=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots[\alpha+(k-1)]\,\beta(\beta+1)\ldots[\beta+(k-1)]}{k!\,\gamma(\gamma+1)\ldots[\gamma+(k-1)]}.
\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Следовательно, искомым частным решением будет:

$$y_1=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)=1+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots[\alpha+(k-1)]\,\beta(\beta+1)\ldots[\beta+(k-1)]}{k!\,\gamma(\gamma+1)\ldots[\gamma+(k-1)]}x^k. \tag{59}$$

Ряд справа называется *гипергеометрическим рядом*. Он сходится при $|x|<1$. Если $\alpha=1$, $\beta=\gamma$, то ряд (59) обращается в геометрическую прогрессию

$$F(1,\ \beta,\ \beta;\ x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1. \tag{60}$$

Можно доказать, что второе частное решение, т. е. решение, соответствующее корню $\rho_2 = 1 - \gamma$, имеет вид

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x). \qquad (61)$$

Входящий сюда степенной ряд сходится при $|x| < 1$. Поэтому *формула*

$$y = C_1 F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ x) \qquad (62)$$

дает общее решение уравнения Гаусса в области

$$|x| < 1\ (x \neq 0), \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty. \qquad (63)$$

29. К уравнению Гаусса приводятся многие другие дифференциальные уравнения. В частности, к нему приводится уравнение Лежандра:

$$(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0. \qquad (64)$$

Для этого достаточно положить

$$x = 1 - 2z. \qquad (65)$$

Тогда:

$$y'_x = y'_z z'_x = y'_z \frac{1}{x'_z} = y_z\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$y''_{x^2} = y''_{z^2} \frac{1}{4},$$

и мы получаем:

$$z(z-1)\,y'' + (-1 + 2z)\,y' - n(n+1)\,y = 0. \qquad (66)$$

Это есть уравнение Гаусса с параметрами:

$$\alpha = n + 1, \quad \beta = -n, \quad \gamma = 1. \qquad (67)$$

Оба корня определяющего уравнения

$$\rho(\rho - 1) + \rho = 0 \qquad (68)$$

в особой точке $z = 0$ равны нулю. Поэтому одно решение будет голоморфно в окрестности точки $z = 0$, а второе будет обязательно содержать $\ln z$. Если, в частности, n — целое положительное число, то гипергеометрический ряд, дающий первое решение, обрывается и превращается в полином степени n. Следовательно, при n целом, большем нуля, одно из решений уравнения Лежандра будет полиномом от x:

$$P_n(x) = F\left(n + 1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right). \qquad (69)$$

Этот полином называется *полиномом Лежандра*.

30. Рассмотрим однородное линейное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{70}$$

коэффициенты которого непрерывны в интервале $(a,\ b)$. Всякое решение $y = y(x)$ этого уравнения определено и дважды непрерывно дифференцируемо во всем интервале $(a,\ b)$. Изучим вопрос о числе *нулей* ненулевого решения $y = y(x)$, т. е. о числе вещественных корней уравнения $y(x) = 0$ или, что то же, о числе точек на интервале $(a,\ b)$, в которых интегральная кривая $y = y(x)$ пересекает ось Ox. Заметим, что ненулевое решение не может касаться оси Ox на интервале непрерывности коэффициентов (почему?). Поэтому всякий раз, когда решение $y = y(x)$ обращается в нуль, оно меняет знак. Так что чем чаще решение обращается в нуль, тем чаще оно меняет знак — *сильнее колеблется.*

Все нули любого ненулевого решения $y = y(x)$ при сделанном предположении относительно непрерывности $p(x)$ и $q(x)$ *изолированы*, т. е. для каждого нуля $x = x_0$ найдется такая окрестность, в которой нет других нулей решения $y = y(x)$.

В самом деле, пусть точка $x = x^*$ лежит внутри $(a,\ b)$ и является точкой сгущения нулей решения $y = y(x)$. Тогда $y(x^*) = 0$, $y'(x^*) = 0$ (почему?). Поэтому в силу единственности $y = y(x)$ есть нулевое решение вопреки предположению.

Из доказанного следует, что во всяком замкнутом интервале $[\alpha,\ \beta]$, лежащем внутри интервала $(a,\ b)$, может содержаться лишь конечное число нулей любого ненулевого решения $y = y(x)$.

В дальнейшем при изучении колебательного характера решений уравнения (70) речь будет всегда идти только о ненулевых решениях.

Решение $y = y(x)$ называется *колеблющимся* в интервале $(a,\ b)$, если оно обращается в этом интервале в нуль не менее двух раз. В противном случае решение $y = y(x)$ называется *неколеблющимся* в интервале $(a,\ b)$.

При изучении колебательного характера решений достаточно ограничиться рассмотрением уравнения вида

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{71}$$

ибо уравнение (70) при помощи подстановки

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2}\,dx} z \tag{72}$$

приводится к уравнению, не содержащему члена с первой производной. При этом нули функций y и z совпадают.

Если $q(x)=q=\text{const}$, то колебательный характер решений вполне определяется знаком числа q: при $q\leqslant 0$ все решения — не колеблющиеся в любом интервале (a, b), при $q>0$ — все решения колеблющиеся в достаточно большом интервале (почему?). Отмеченный признак неколебательности решений переносится и на случай, когда $q(x)$ есть функция от x.

Теорема. *Если* $q(x)\leqslant 0$ *в* (a, b), *то все решения уравнения* (192) *неколеблющиеся.*

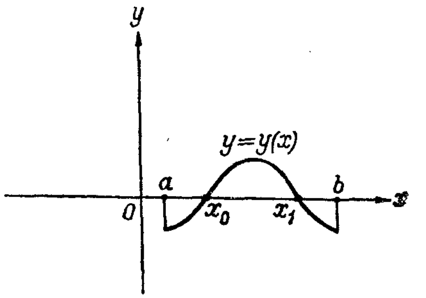

Рис. 53.

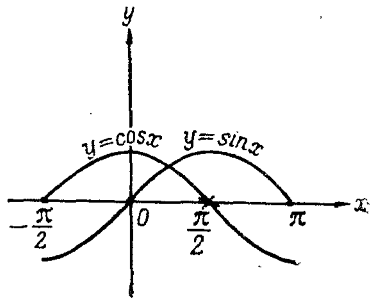

Рис. 54.

Действительно, предположим, что существует решение $y=y(x)$, колеблющееся в интервале (a, b). Пусть $x=x_0$ и $x=x_1$ его последовательные нули [лежащие в (a, b)]. Не умаляя общности, будем считать, что $y(x)>0$ в (x_0, x_1) (рис. 53). Тогда $y'(x_0)\geqslant 0$. Но $y'(x_0)\neq 0$ (почему?). Поэтому $y'(x_0)>0$. Аналогично убеждаемся, что $y'(x_1)<0$. Однако последнее невозможно, ибо из уравнения (192) следует, что

$$y''(x)=-q(x)\,y(x)\geqslant 0 \quad \text{при } x_0\leqslant x\leqslant x_1, \tag{73}$$

так что $y'(x)$ не убывает в $[x_0, x_1]$.

Отметим, что доказанное условие неколебательности решений является лишь достаточным. Например, все решения уравнения Эйлера

$$x^2y''+a^2y=0, \tag{74}$$

где $a^2\leqslant\frac{1}{4}$, неколеблющиеся в интервале $(0, \infty)$ (почему?).

31. Сравним колебательный характер решений одного и того же уравнения. На примере уравнения

$$y''+y=0 \tag{75}$$

мы видим, что нули его линейно независимых частных решений $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ *взаимно разделяют друг друга*, т. е. между двумя последовательными нулями одного решения лежит в точности один нуль другого (рис. 54). Это свойство решений распространяется и на случай уравнения с переменными коэффициентами.

Теорема *Штурма*. *Если $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$ — линейно независимые частные решения уравнения* (70), *коэффициенты которого непрерывны в интервале* (a, b), *то между двумя последовательными нулями решения $y_1=y_1(x)$ лежит ровно один нуль решения $y_2=y_2(x)$.*

В самом деле, допустим противное. Пусть $x=x_0$ и $x=x_1$ — последовательные нули решения $y_1=y_1(x)$, лежащие в интервале (a, b) и решение $y_2=y_2(x)$ не обращается в нуль в (x_0, x_1). Пусть, например, $y_2(x)>0$ в (x_0, x_1). Заметим, что $y_2(x_0)\neq 0$, $y_2(x_1)\neq 0$ (почему?).

Рассмотрим тождество

$$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]'=-\frac{W(x)}{y_2^2(x)}. \tag{76}$$

[$W(x)$ — определитель Вронского решений $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$]. Интегрируя его по интервалу $[x_0, x_1]$, имеем:

$$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]_{x=x_0}^{x=x_1}=-\int_{x_0}^{x_1}\frac{W(x)}{y_2^2(x)}dx. \tag{77}$$

Здесь левая часть равна нулю, а правая отлична от нуля (почему?). Следовательно, наше предположение неверно. В интервале (x_0, x_1) имеется хоть одна точка $x=\bar{x}$, в которой решение $y_2=y_2(x)$ обращается в нуль.

Покажем, что такая точка только одна. Пусть существуют две такие точки: $x=\bar{x}_1$ и $x=\bar{x}_2$, причем $x_0<\bar{x}_1<\bar{x}_2<x_1$. Тогда, поменяв ролями решения $y_1=y_1(x)$ и $y_2=y_2(x)$, мы получили бы, что между нулями $x=\bar{x}_1$ и $x=\bar{x}_2$ решения $y_2(x)$ лежит хоть один нуль $x=x^*$ решения $y_1=y_1(x)$. Этот нуль лежит между нулями $x=x_0$ и $x=x_1$, что невозможно (ведь нули $x=x_0$ и $x=x_1$ последовательные!)

Сравним колебательный характер решений двух уравнений:

$$y''+q_1(x)y=0 \quad \text{и} \quad z''+q_2(x)z=0. \tag{78}$$

Теорема сравнения. *Если в уравнениях* (78) *коэффициент второго уравнения превосходит коэффициент первого,*

$$q_2(x)\geqslant q_1(x), \tag{79}$$

то между двумя последовательными нулями любого решения $y=\bar{y}(x)$ первого уравнения лежит хоть один нуль любого решения $z=\bar{z}(x)$ второго уравнения (рис. 55), *если только между этими нулями существует точка, в которой $q_2(x)>q_1(x)$.*

Действительно, пусть $x = x_0$ и $x = x_1$ — последовательные нули решения $y = \bar{y}(x)$. Будем считать, что $\bar{y}(x) > 0$ в (x_0, x_1). Тогда $\bar{y}'(x_0) > 0$, $\bar{y}'(x_1) < 0$ (почему?). Предположим, что решение $z = \bar{z}(x)$ не имеет нулей в интервале (x_0, x_1). Пусть $\bar{z}(x) > 0$ в (x_0, x_1). Тогда $\bar{z}(x_0) \geqslant 0$, $\bar{z}(x_1) \geqslant 0$. Рассмотрим два тождества:

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}''(x) + q_1(x)\bar{y}(x) = 0, \\ \bar{z}''(x) + q_2(x)\bar{z}(x) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (a < x < b). \tag{80}$$

Умножим их почленно на $\bar{z}(x)$ и $\bar{y}(x)$ и вычтем (почленно) второе из первого:

$$\bar{y}''\bar{z} - \bar{z}''\bar{y} = [q_2(x) - - q_1(x)]\,\bar{y}\bar{z}. \tag{81}$$

Переписав это тождество в виде

$$[\bar{y}'\bar{z} - \bar{z}'\bar{y}]' = = [q_2(x) - q_1(x)]\,\bar{y}\bar{z} \tag{82}$$

и интегрируя по интервалу $[x_0, x_1]$, имеем:

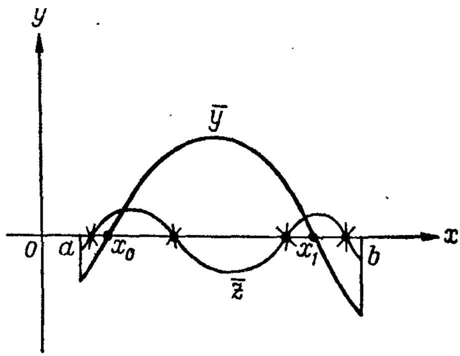

Рис. 55.

$$\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1) - \bar{y}'(x_0)\bar{z}(x_0) = \int_{x_0}^{x} [q_2(x) - q_1(x)]\,\bar{y}\bar{z}, \tag{83}$$

что невозможно, ибо левая часть не положительна, а правая положительна (почему?). Теорема доказана. В подобных случаях говорят, что решения второго из уравнений (78) *колеблются сильнее*, чем решения первого. (Ср. уравнения $y'' + y = 0$ и $z'' + 4z = 0$. Сделать рисунки.)

§ 7. ЗАДАЧИ

Матвеев. Сборник задач, №№ **602, 605, 607, 609, 611, 613, 617—619, 625—627, 630, 631, 635, 637, 640—642, 644, 646, 648, 650, 652, 655, 660, 661, 676—678, 699—702, 704, 716, 719, 721, 723, 726, 728, 729, 731, 732, 737, 753, 756—759, 766, 767, 786, 788, 789, 795, 797, 799.**

Найти операционным методом решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

42. $x''' - 2x'' + 9x' - 18x = 0$; $x = 1$, $x' = 2$, $x'' = 4$ при $t = 0$.

43. $x'' - 2x' + x = 4e^t$; $x = 0$, $x' = 0$ при $t = 0$.

44. $x'' + x = 6\sin 2t$; $x = 0$, $x' = -4$ при $t = 0$.

ГЛАВА VII

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Однородная и неоднородная системы. **2.** Существование и единственность решения задачи Коши. **3.** Инвариантность линейной системы относительно любого преобразования независимой переменной. **4.** Инвариантность линейной системы относительно линейного преобразования искомых функций.

§ 2. ОДНОРОДНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

5. Свойства решений. **6.** Линейно независимые частные решения. **7.** Формула Остроградского—Лиувилля—Якоби. **8.** Фундаментальная система решений. **9.** Построение общего решения однородной линейной системы по фундаментальной системе решений.

§ 3. НЕОДНОРОДНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

10. Приведение интегрирования неоднородной системы в случае, когда известно одно частное решение ее, к интегрированию соответствующей однородной системы. **11.** Метод вариации произвольных постоянных.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

12. Построение фундаментальной системы решений и общего решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае различных корней характеристического уравнения. **13.** Случай наличия кратных корней.

§ 5. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

14. Некоторые сведения из теории матриц. **15.** Запись однородной линейной системы в матричной форме. **16.** Свойства матричного уравнения. **17.** Свойства интегральной матрицы.

18. Построение интегральной матрицы в случае, когда матрица коэффициентов коммутирует со своим интегралом. **19.** Интегрирование однородной линейной системы с постоянными коэффициентами в случае, когда матрица коэффициентов системы каноническая. **20.** Случай, когда матрица коэффициентов системы не каноническая. **21.** Правило интегрирования однородной линейной системы с постоянными коэффициентами матричным методом. **22.** Вид семейства решений, соответствующих данному характеристическому числу. **23.** Приведение однородной линейной системы с постоянными коэффициентами к каноническому виду. **24.** Исследование устойчивости нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами по корням характеристического уравнения. **25.** Исследование устойчивости нулевого решения автономной нелинейной системы по первому приближению. Теорема Ляпунова.

§ 6. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования, гл. IX, пп. **197—206, 209, 210**; гл. X, пп. **211—215, 218, 220**; гл. XI, пп. **222—226, 228, 229.**

Степанов, гл. VII, § 2.

Эльсгольц, гл. III, § 4, 5.

Дополнительная

Матвеев. Методы интегрирования, пп. **207, 208, 216, 217, 219, 221.**

Петровский, гл. V, §§ 33—37, 40, 41; гл. VI, §§ 43—52.

Понтрягин, гл. 2, §§ 14, 16; гл. 3, §§ 17, 18; гл. V (стр. 210—214).

Степанов, гл. VII, § 6.

Эльсгольц, гл. IV, §§ 2—5.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Рассмотрим линейную систему n-го порядка:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}(x)y_l+f_k(x) \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Напомним, что если все $f_k(x)\equiv 0$, то система (1) принимает вид

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}(x)y_l \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2}$$

и называется *однородной*; в противном случае — *неоднородной*.

Систему (1) можно записать в векторной форме.* С этой целью будем рассматривать решение

$$y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x) \tag{3}$$

как вектор $\bar{y}=\bar{y}\{y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n\}$, составляющими которого являются функции (3):

$$\bar{y}=\left\|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{matrix}\right\|. \tag{4}$$

Определим производную вектора $\bar{y}$ равенством

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=\left\|\begin{matrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{matrix}\right\|. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение вектор $\bar{f}=\bar{f}\{f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n\}$:

$$\bar{f}=\left\|\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{matrix}\right\|. \tag{6}$$

Обозначим матрицу коэффициентов системы (1) через P.

$$P=\left\|\begin{matrix} p_{11}p_{12}\ldots p_{1n} \\ p_{12}p_{22}\ldots p_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1}p_{n2}\ldots p_{nn} \end{matrix}\right\|. \tag{7}$$

---

* Используемые ниже сведения из теории матриц мы предполагаем известными из курса высшей алгебры. Читатель найдет их в п. **14**.

Тогда мы можем переписать систему (1) в виде*

$$\begin{Vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p_{11} p_{12} \ldots p_{1n} \\ p_{21} p_{22} \ldots p_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1} p_{n2} \ldots p_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{Vmatrix} \tag{8}$$

или

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = P\overline{y} + \overline{f}. \tag{9}$$

Однородная система (2) запишется так:

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = P\overline{y}. \tag{10}$$

2. Предположим, что коэффициенты $p_{kl}(x)$ и функции $f_k(x)$ непрерывны в интервале (a, b).** Тогда система (1) имеет единственное решение (3), определенное во всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ \ldots,\ y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0, \tag{11}$$

где $x_0 \in (a, b)$, а $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ могут быть заданы произвольно. В частности, единственным решением однородной линейной системы (2) с нулевыми начальными условиями

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \ \ldots,\ y_n = 0 \text{ при } x = x_0 \in (a, b) \tag{12}$$

будет нулевое решение

$$y_1 \equiv 0, \quad y_2 \equiv 0, \ \ldots,\ y_n \equiv 0. \tag{13}$$

В векторной форме эти утверждения формулируются так. Если матрица $P(x)$ непрерывна в интервале (a, b), т. е. все ее элементы непрерывны в этом интервале, то уравнение (9) имеет единственное *решение*

$$\overline{y} = \overline{y}(x), \tag{14}$$

* Матрица P умножается на вектор $\overline{y}$, который можно рассматривать как одностолбцовую матрицу по правилу

$$\begin{Vmatrix} p_{11} p_{12} \ldots p_{1n} \\ p_{21} p_{22} \ldots p_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1} p_{n2} \ldots p_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1n}y_n \\ p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \ldots + p_{2n}y_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \ldots + p_{nn}y_n \end{Vmatrix}$$

(ср. правило умножения матриц, указанное в п. 14).

** См. замечание относительно интервала изменения независимой переменной в сноске на стр. 237.

удовлетворяющее *начальным условиям*

$$\overline{y} = \overline{y}^{(0)} \quad \text{при} \quad x = x_0 \in (a, b), \tag{15}$$

где

$$\overline{y}^{(0)} = \begin{Vmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^{(0)} \end{Vmatrix} \tag{16}$$

— произвольный заданный вектор (*начальный вектор*). Единственным решением уравнения (10) с начальными условиями

$$\overline{y} = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 \in (a, b) \tag{17}$$

будет *нулевой* вектор

$$\overline{y} = 0 \quad (a < x < b). \tag{18}$$

3. Линейная система остается линейной при любой замене независимой переменной x.

В самом деле, положим

$$x = \varphi(t) \quad (t_0 < t < t_1), \tag{19}$$

где $\varphi(t_0) = a$, $\varphi(t_1) = b$, $\varphi'(t)$ существует, непрерывна и сохраняет знак в (t_0, t_1). Тогда

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = \frac{d\overline{y}}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d\overline{y}}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d\overline{y}}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}. \tag{20}$$

Поэтому, выполняя в уравнении (9) подстановку (19), имеем:

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = \left(P\overline{y} + \overline{f}\right)\varphi'(t), \tag{21}$$

или

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = P_1\overline{y} + \overline{f}_1, \tag{22}$$

где

$$P_1 = P[\varphi(t)]\,\varphi'(t), \quad \overline{f}_1 = \overline{f}[\varphi(t)]\,\varphi'(t). \tag{23}$$

Очевидно, что при преобразовании (19) однородная система остается однородной.

4. Линейная система остается линейной при любом линейном преобразовании искомых функций

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(x)\,y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

где $\alpha_{ik}(x)$ — непрерывно дифференцируемы в интервале (a, b), причем преобразование (24) *неособенное*, т. е. определитель матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \tag{25}$$

отличен от нуля во всем интервале (a, b).

Действительно, преобразование (24) можно записать так:

$$\overline{z}=A\overline{y}. \tag{26}$$

Покажем, что оно не нарушает вида уравнения (9). Прежде всего отметим, что существует обратное преобразование:

$$\overline{y}=A^{-1}\overline{z}, \tag{27}$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A (A^{-1} существует, ибо определитель матрицы A отличен от нуля). Поэтому, дифференцируя (26) и принимая во внимание уравнение (9), имеем:

$$\frac{d\overline{z}}{dx}=\frac{dA}{dx}\overline{y}+A\frac{d\overline{y}}{dx}=\frac{dA}{dx}\overline{y}+A\left(P\overline{y}+\overline{f}\right)=$$
$$=\frac{dA}{dx}A^{-1}\overline{z}+APA^{-1}\overline{z}+A\overline{f}, \tag{28}$$

или

$$\frac{d\overline{z}}{dx}=A_1\overline{z}+\overline{f}_1, \tag{29}$$

где

$$A_1=\frac{dA}{dx}A^{-1}+APA^{-1},\quad \overline{f}_1=A\overline{f}. \tag{30}$$

§ 2. ОДНОРОДНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

5. Рассмотрим однородную линейную систему

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}(x)y_l \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

где коэффициенты $p_{kl}(x)$ непрерывны в интервале (a, b).

Покажем, что она всегда имеет n частных решений (всякое решение этой системы, так же как и любое решение неоднородной системы, является частным решением), из которых можно построить общее решение.

С этой целью отметим сначала следующие свойства решений системы (1).

1. Если

$$y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x),\ \ldots,\ y_n=y_n(x) \tag{2}$$

есть частное решение системы (1), то

$$y_1=Cy_1(x),\quad y_2=Cy_2(x),\ \ldots,\ y_n=Cy_n(x), \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная, тоже будет решением (почему?).

2. Если известно m частных решений

$$\left.\begin{array}{llll} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n} \text{ — 1-е решение,} \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n} \text{ — 2-е решение,} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1}, & y_{m2}, & \ldots, & y_{mn} \text{ — } m\text{-е решение,} \end{array}\right\} \tag{4}$$

то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_m$

$$y_k=\sum_{i=1}^{m} C_i y_{ik} \quad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

тоже будет решением (почему?).

Так же как и в случае однородного линейного уравнения n-го порядка, для нахождения вещественных решений системы (1) иногда используют комплексные решения. Совокупность функций

$$y_k=u_k+iv_k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

где u_k, v_k — вещественные функции от x, определенные и непрерывно дифференцируемые в (a, b), называется ***комплексным решением*** системы (1), если они обращают все уравнения этой системы в тождества. При этом вещественные и мнимые части этого решения образуют решения системы (1) (почему?).

Если найдено n вещественных частных решений, то формула (5) дает решение, содержащее n произвольных постоянных. Однако это решение не всегда будет общим.

6. Рассмотрим m систем функций

$$\left.\begin{array}{llll} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n}, \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1}, & y_{m2}, & \ldots, & y_{mn}, \end{array}\right\} \tag{7}$$

определенных и непрерывных в интервале (a, b). Эти системы называются *линейно независимыми* в интервале (a, b), если тождества

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_{ik} \equiv 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n,\ a<x<b), \tag{8}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — постоянные числа, могут выполняться только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. В противном случае системы функций (7) называются *линейно зависимыми* в интервале (a, b).

Если одна из систем функций (7) составлена из тождественных нулей, то эти системы линейно зависимы в (a, b) (почему?).

Докажем две теоремы, устанавливающие признаки линейной зависимости любых n систем функций и линейной независимости n решений системы (1).

Пусть, имеется n систем функций

$$\left.\begin{array}{l} y_{11},\ y_{12},\ \ldots,\ y_{1n}, \\ y_{21},\ y_{22},\ \ldots,\ y_{2n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_{n1},\ y_{n2},\ \ldots,\ y_{nn}. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Введем в рассмотрение *определитель Вронского*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Если системы* (9) *линейно зависимы в интервале* (a, b), *то* $W(x) \equiv 0$ *в интервале* (a, b).

Действительно, мы имеем тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} \equiv 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n,\ a < x < b), \tag{11}$$

где не все α_i равны нулю, а это возможно только в том случае, когда $W(x) \equiv 0$ в (a, b) (почему?).

Теорема 2. *Если системы функций* (9) — *суть решения однородной линейной системы* (1), *линейно независимые в* (a, b) [*т. е. в интервале непрерывности коэффициентов системы* (1)], *то* $W(x)$ *не обращается в нуль ни в одной точке* x *из* (a, b).

В самом деле, пусть $W(x_0) = 0$, $x_0 \in (a, b)$. Составим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}(x_0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Эта система имеет ненулевое решение $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}, \ldots, C_n = C_n^{(0)}$ (почему?). Построим решение системы (1):

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Это решение удовлетворяет **нулевым** начальным условиям:

$$y_k(x)=0 \quad \text{при} \quad x=x_0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{14}$$

(почему?), а тогда, в силу теоремы единственности, оно является **нулевым**, т. е. имеют место тождества

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik}(x) \equiv 0 \quad (k=1,2,\ \ldots,\ n,\ a<x<b), \tag{15}$$

где не все $C_i^{(0)}$ равны нулю, что невозможно, ибо решения (9) линейно независимы в $(a,\ b)$.

Из доказанных теорем следует, что *для того, чтобы n частных решений* (9) *были линейно независимы в* $(a,\ b)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $W(x)$ *не обращался в нуль в* $(a,\ b)$. На самом деле достаточно проверить, что $W(x)$ отличен от нуля в какой-нибудь одной точке $x=x_0$ из $(a,\ b)$, ибо если $W(x_0)\neq 0$, $x_0 \in (a,\ b)$, то $W(x)\neq 0$ при всех $x\in(a,\ b)$ (почему?).

7. Определитель Вронского n частных решений однородной линейной системы (1) выражается через сумму диагональных элементов матрицы коэффициентов этой системы следующей *формулой Остроградского — Лиувилля — Якоби:*

$$W(x)=W(x_0)\, e^{\int\limits_{x_0}^{x} \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ii}(x)\, dx}. \tag{16}$$

Из этой формулы видно, что

1) если $W(x_0)=0$, $x_0\in(a,\ b)$, то $W(x)=0$ при всех $x\in(a,\ b)$;

2) если $W(x_0)\neq 0$, $x_0\in(a,\ b)$, то $W(x)\neq 0$ при всех $x\in(a,\ b)$.

8. Совокупность (9) n линейно независимых в $(a,\ b)$ частных решений однородной линейной системы (1) называется *фундаментальной системой решений.* Отметим, что нулевое решение не может входить в состав фундаментальной системы (почему?). Фундаментальную систему решений можно записать в виде матрицы

$$\begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{17}$$

предполагая, что каждая **строка** этой матрицы есть **решение** системы (1). (Такое расположение решений не существенно; их можно было располагать и по столбцам.)

Теорема. *Если коэффициенты системы* (1) *непрерывны в интервале* (a, b), *то фундаментальная система решений существует.*

Действительно, построим, пользуясь теоремой Пикара, n решений, удовлетворяющих следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{ll} y_{1k}: & y_{11}=1,\ y_{12}=0,\ \ldots,\ y_{1n}=0 \\ y_{2k}: & y_{21}=0,\ y_{22}=1,\ \ldots,\ y_{2n}=0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{nk}: & y_{n1}=0,\ y_{n2}=0,\ \ldots,\ y_{nn}=1 \end{array}\right\} \quad \text{при } x=x_0\in(a\ \ b). \qquad (18)$$

Эти решения образуют фундаментальную систему решений, ибо $W(x_0)=1\neq 0$.

Построенная фундаментальная система решений называется *нормированной* в точке $x=x_0$. Существует бесчисленное множество других фундаментальных систем (почему?).

Если коэффициенты системы (1) голоморфны в окрестности $|x-x_0|<\rho$ точки $x=x_0$, то, пользуясь теоремой Коши, можно построить фундаментальную систему решений, голоморфных по крайней мере в той же окрестности, что и коэффициенты системы.

9. Если найдено n линейно независимых частных решений однородной линейной системы, т. е. фундаментальная система решений, то, пользуясь ими, можно построить общее решение.

Теорема. *Если* (9) *есть фундаментальная система решений однородной линейной системы* (1), *то*

$$y_k=\sum_{i=1}^{n}C_iy_{ik} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (19)$$

где C_i — произвольные постоянные, есть и общее решение системы (1) *в области*

$$a<x<b,\ |y_k|<+\infty \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (20)$$

В самом деле, вспоминая определение общего решения нормальной системы (гл. IV, п. **6**), заметим прежде всего, что область (20) есть область существования и единственности решения задачи Коши для системы (1) и что функции (19) определены в области

$$a<x<b,\quad |C_1|<+\infty,\quad |C_2|<+\infty,\ \ldots,\ |C_n|<+\infty \qquad (21)$$

и непрерывно дифференцируемы по x. Проверяем теперь выполнение обоих пунктов определения общего решения.

1) Система (19) разрешима в области (20) относительно произвольных постоянных C_i (почему?).

2) Функции (19) образуют решение системы (1) при всех значениях произвольных постоянных C_i.

Следовательно, (19) есть общее решение системы (1) в области (20).

Для решения задачи Коши с начальными данными x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ из области (20) нужно подставить их в общее решение (19) и разрешить полученную систему

$$y_k^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik}(x_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{22}$$

относительно C_i. Подставляя найденные значения $C_i = C_i^{(0)}$ в общее решение (19), мы и получим искомое решение

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)} y_{ik}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{23}$$

Других решений нет.

Если фиксировать x_0, а $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ считать произвольными, то $C_i^{(0)}$ будут линейными функциями от $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$ и формула (23) дает общее решение системы (1) в формуле Коши.

Все решения однородной линейной системы (1) содержатся в формуле общего решения (19) или (23). Система (1) не может иметь более чем n линейно независимых частных решений (почему?).

Заметим, что аналитический характер общего решения, доставляемого формулой общего решения (19) или (23) определяется аналитическим характером фундаментальной системы решений, который в свою очередь определяется свойствами коэффициентов системы. Если последние не только непрерывны, но и голоморфны в окрестности $|x - x_0| < \rho$ точки $x = x_0$, то каждая из формул (19) и (23) дает общее решение, голоморфное по крайней мере в той же окрестности.

Разрешая общее решение (19) относительно произвольных постоянных C_i, получим общий интеграл системы (1) в виде

$$\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Каждое из равенств (24) есть первый интеграл, а каждая из функций ψ_i является интегралом системы (1), так что система (1) имеет ровно n независимых интегралов. Отметим, что все интегралы ψ_i зависят от искомых функций y_1, y_2, ..., y_n линейно. Они являются непрерывно дифференцируемыми функциями от x, y_1, y_2, ..., y_n если коэффициенты $p_{kl}(x)$ системы

(1) непрерывны в (a, b). Если $p_{kl}(x)$ голоморфны в окрестности $|x-x_0|<\rho$ точки $x=x_0$, то и интегралы ψ_i будут голоморфными функциями всех аргументов.

§ 3. НЕОДНОРОДНАЯ ЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

10. Рассмотрим неоднородную линейную систему

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\,y_l+f_k(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

или

$$\frac{d\bar{y}}{dx}=P\bar{y}+\bar{f}, \tag{1'}$$

где коэффициенты $p_{kl}(x)$, или, что то же, матрица $P(x)$, непрерывны в интервале (a, b).

Если известно частное решение системы (1) или (1′), то интегрирование ее может быть приведено к интегрированию *соответствующей однородной системы*

$$\frac{dz_k}{dx}\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)\,z_l \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

или

$$\frac{d\bar{z}}{dx}=P\bar{z}. \tag{2'}$$

Действительно, пусть

$$\bar{y}^{(1)}\{y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(1)}\} \tag{3}$$

есть частное решение уравнения (1′), т. е.

$$\frac{d\bar{y}^{(1)}}{dx}\equiv P\bar{y}^{(1)}+\bar{f} \qquad (a<x<b). \tag{4}$$

Тогда, полагая в уравнении (1′)

$$\bar{y}=\bar{y}^{(1)}+\bar{z}, \tag{5}$$

где $\bar{z}=\bar{z}\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, получим:

$$\frac{d\bar{y}^{(1)}}{dx}+\frac{d\bar{z}}{dx}=P\bar{y}^{(1)}+P\bar{z}+\bar{f}, \tag{6}$$

или

$$\frac{d\bar{z}}{dx}=P\bar{z}. \tag{7}$$

Если z_{ik} $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ — фундаментальная система решений однородной системы (2), то

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

будет общим решением системы (1) в области

$$a < x < b, \ |y_k| < +\infty \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

(почему?).

Все решения неоднородной системы содержатся в формуле (8).

11. *Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)* дает возможность всегда найти общее решение неоднородной линейной системы (1) в квадратурах, если известна фундаментальная система решений соответствующей однородной системы.

Пусть z_{ik} $(i, \ k = 1, 2, \ldots, n)$ — фундаментальная система решений однородной системы (2). Тогда ее общее решение имеет вид

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

где C_i — произвольные постоянные. Будем искать общее решение неоднородной системы (1) в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

где $C_i(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x.

Подставляя (11) в (1), имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{ik}' = \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{il} + f_k(x) \tag{12}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x) \left[z_{ik}' - \sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x) z_{il} \right] = f_k(x). \tag{13}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как выражения в квадратных скобках тождественно равны нулю (почему?), то

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Решая эту систему относительно $C_i'(x)$, имеем:

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

где $\varphi_i(x)$ непрерывны в (a, b) (почему?). Интегрируя (15), найдем:

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16}$$

Подставляя эти значения $C_i(x)$ в (11), получим:

$$y_k = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} z_{ik} \int \varphi_i(x)\,dx}_{y_k^{(1)}} + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Это есть общее решение системы (1) в области (9).

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

12. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(x), \tag{1}$$

коэффициенты которой a_{kl} суть постоянные вещественные числа, а правая часть $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b).

Изучим сначала однородную систему

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l. \tag{2}$$

Следуя *Эйлеру*, покажем, что существует фундаментальная система решений, состоящая из элементарных функций. Тем самым будет доказано, что любая линейная система с постоянными коэффициентами всегда может быть проинтегрирована по крайней мере в квадратурах.

Будем искать решение системы (2) в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \; y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \; \ldots, \; y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \tag{3}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \lambda$ — постоянные числа, причем числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ не равны нулю одновременно (ведь наша цель построить фундаментальную систему решений, а нулевое решение не может входить в нее!). Подставляя (3) в систему (2) и сокращая на $e^{\lambda x}$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\
&a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эта система имеет ненулевое решение относительно γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ тогда, и только тогда, когда λ является корнем уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

(почему?). Уравнение (5) называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* системы (2). Полином n-й степени $\Delta(\lambda)$, стоящий в левой части уравнения (5), называется *характеристическим полиномом.*

Структура фундаментальной системы решений зависит от вида корней характеристического уравнения (хотя, как увидим ниже, в отличие от линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами, не всегда вполне ими определяется).

Рассмотрим сначала случай, когда все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения (5) различные. В этом случае, полагая в системе (4) $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), получим следующую алгебраическую однородную линейную систему относительно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda_i)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_i)\gamma_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ранг матрицы коэффициентов этой системы равен $n-1$. Действительно, вычисляя производную от $\Delta(\lambda)$ (дифференцируя при этом поочередно каждый столбец определителя $\Delta(\lambda)$ и складывая полученные определители), получим

$$\Delta'(\lambda) = -\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ii}(\lambda), \qquad (7)$$

где $\Delta_{ii}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение диагонального элемента $a_{ii}-\lambda$. Так как $\Delta'(\lambda_i) \neq 0$ (почему?), то хоть один из $\Delta_{ii}(\lambda_i)$ отличен от нуля, так что ранг системы (6) равен $n-1$. Поэтому система (6) имеет бесчисленное множество ненулевых решений, определенное с точностью до постоянного множителя. Пусть

$$\gamma_1 = \gamma_{i1}, \ \gamma_2 = \gamma_{i2}, \ \ldots, \ \gamma_n = \gamma_{in} \qquad (8)$$

одно из этих решений. Заметим, что в качестве γ_{ik} можно взять алгебраические дополнения элементов любой строки определителя системы (6), если все они не равны одновременно нулю (почему?). Такая строка всегда найдется (почему?).

Выполняя указанные вычисления для каждого λ_i, подставляя найденные значения чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ в формулы (3) и заменяя λ на λ_i, получим n решений системы (2):

$$\left.\begin{array}{l} y_{11}=\gamma_{11}e^{\lambda_1 x}, \quad y_{12}=\gamma_{12}e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots, \quad y_{1n}=\gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ y_{21}=\gamma_{21}e^{\lambda_2 x}, \quad y_{22}=\gamma_{22}e^{\lambda_2 x}, \quad \ldots, \quad y_{2n}=\gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n1}=\gamma_{n1}e^{\lambda_n x}, \quad y_{n2}=\gamma_{n2}e^{\lambda_n x}, \quad \ldots, \quad y_{nn}=\gamma_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Эти решения линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$ (почему?).

Если все λ_i вещественны, то решения (9) будут вещественными и образуют фундаментальную систему решений.

Поэтому

$$y_k=\sum_{i=1}^{n} C_i\gamma_{ik}e^{\lambda_i x} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{10}$$

будет общим решением системы (2) в области

$$|x|<+\infty, \ |y_k|<+\infty \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{11}$$

Если **корни характеристического уравнения (5) различны, но среди них имеются комплексные**, то последние входят сопряженными парами (почему?). Укажем вид вещественных частных решений, соответствующих паре корней $a \pm ib$. Корню $a+ib$ отвечает комплексное решение

$$y_1=\left(\gamma_1^{(1)}+i\gamma_1^{(2)}\right)e^{(a+ib)x}, \ \ldots, \ y_n=\left(\gamma_n^{(1)}+i\gamma_n^{(2)}\right)e^{(a+ib)x}. \tag{12}$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получим два вещественных линейно независимых частных решения:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11}=e^{ax}\left(\gamma_1^{(1)}\cos bx-\gamma_1^{(2)}\sin bx\right), \ \ldots, \ y_{1n}= \\ \quad =e^{ax}\left(\gamma_n^{(1)}\cos bx-\gamma_n^{(2)}\sin bx\right), \\ y_{21}=e^{ax}\left(\gamma_1^{(1)}\sin bx+\gamma_1^{(2)}\cos bx\right), \ \ldots, \ y_{2n}= \\ \quad =e^{ax}\left(\gamma_n^{(1)}\sin bx+\gamma_n^{(2)}\cos bx\right). \end{array}\right\} \tag{13}$$

Вещественные решения, соответствующие корню $a-ib$, будут линейно зависимы с решениями (13) (почему?). Таким образом, паре сопряженных комплексных корней $a \pm ib$ соответствуют два вещественных линейно независимых частных решения вида (13).

Построив вещественные линейно независимые частные решения, соответствующие всем вещественным корням и каждой паре сопряженных комплексных корней, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение системы (2).

13. Рассмотрим случай, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Пусть λ_1 — корень кратности k. Тогда можно доказать (см. п. **22**), что ему соответствует семейство решений, зависящее от k произвольных постоянных вида

$$y_1 = P_1(x)\,e^{\lambda_1 x},\ y_2 = P_2(x)\,e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ y_n = P_n(x)\,e^{\lambda_1 x}, \tag{14}$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ — полиномы от x степени не выше $k-1$, причем k коэффициентов этих полиномов произвольны, а остальные выражаются через них. Коэффициенты полиномов $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ можно определить подстановкой (14) в систему (2).

В п. **22** мы выясним, когда полиномы, входящие в (14), обращаются в постоянные числа, когда они достигают наивысшей степени $k-1$ и вообще от чего зависит степень этих полиномов.

Если λ_1 вещественно и $k=n$, то семейство (14) и является общим решением системы (2).

Формулы (14) дают возможность найти k линейно независимых частных решений, соответствующих корню λ_1 (кратности k). Для этого нужно положить поочередно один из произвольных коэффициентов полиномов $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ равным единице, а остальные равными нулю. Если λ_1 вещественно, то эти k решений вещественны.

Если $\lambda_1 = a + ib$ — комплексный корень кратности k, то ему и сопряженному с ним корню $\lambda_2 = a - ib$ той же кратности (почему такой корень существует?) соответствуют $2k$ вещественных линейно независимых частных решений. Чтобы их найти, рассмотрим семейство комплексных решений, соответствующих корню $\lambda_1 = a + ib$:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left[P_1^{(1)}(x) + iP_1^{(2)}(x)\right] e^{(a+ib)x},\ \ldots,\ y_n = \\ &= \left[P_n^{(1)}(x) + iP_n^{(2)}(x)\right] e^{(a+ib)x}. \end{aligned} \tag{15}$$

Отделяя вещественные и мнимые части, получим два вещественных семейства, соответствующих корню $a+ib$:

$$\begin{aligned} y_1^{(1)} &= e^{ax}\left[P_1^{(1)}(x)\cos bx - P_1^{(2)}(x)\sin bx\right],\ \ldots,\ y_n^{(1)} = \\ &= e^{ax}\left[P_n^{(1)}(x)\cos bx - P_n^{(2)}(x)\sin bx\right], \end{aligned}$$

$$y_1^{(2)} = e^{ax}\left[P_1^{(1)}(x)\sin bx + P_1^{(2)} x\cos bx\right], \ \ldots, \ y_n^{(2)} = \\ = e^{ax}\left[P_n^{(1)}(x)\sin bx + P_n^{(2)}(x)\cos bx\right], \tag{16}$$

Отсюда тем же приемом, что и выше, найдем $2k$ вещественных линейно независимых частных решений. Эти $2k$ решений можем считать соответствующими паре $a \pm ib$, ибо корню $a - ib$ соответствуют решения, линейно зависимые с решениями, соответствующими корню $a + ib$.

Построив линейно независимые частные решения, соответствующие всем простым и кратным корням по указанным выше правилам, получим фундаментальную систему решений. Как и в случае простых корней характеристического уравнения, она будет состоять из элементарных функций. По найденной фундаментальной системе решений известным способом строим общее решение.

Вопрос о структуре фундаментальной системы решений в общем случае мы сможем выяснить лишь несколько позднее (см. п. 20), а сейчас покажем на примерах, что она не вполне определяется корнями характеристического уравнения, если среди корней имеются кратные.

Для простоты ограничимся случаем, когда система состоит из двух уравнений и характеристическое уравнение имеет один двукратный корень.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \lambda_1 y_1 \\ \frac{dy_2}{dx} &= \lambda_1 y_2. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{18}$$

имеет один двукратный корень $\lambda = \lambda_1$. Выясним структуру фундаментальной системы решений.

Общим решением системы (17), очевидно, будет

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = C_2 e^{\lambda_1 x}. \tag{19}$$

Здесь полиномы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ выродились в постоянные числа. Полагая $C_1 = 1$, $C_2 = 0$; $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, получим фундаментальную систему решений, которую запишем в виде матрицы

$$\begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 x} \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

Структура фундаментальной системы решений оказалась такой же, как и в случае простых корней характеристического уравнения.

Пример 2. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= \lambda_1 y_2. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 1 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

тоже имеет один двукратный корень $\lambda = \lambda_1$. Чтобы выяснить структуру фундаментальной системы решений, воспользуемся общим решением системы (21):

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda_1 x}(C_2 + C_1 x), \\ y_2 &= C_1 e^{\lambda_1 x} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(оно находится последовательным интегрированием уравнений системы (21), начиная со второго). Заметим, что, в отличие от примера 1, здесь $P_1(x)$ есть полином максимально возможной, т. е. первой степени относительно x. В качестве фундаментальной системы решений можно взять

$$\begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ x e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} \end{Vmatrix}. \tag{24}$$

Здесь второе решение, в отличие от (20), содержит множитель x.

Заметим, что первое решение может быть получено из второго дифференцированием коэффициентов при $e^{\lambda_1 x}$. В дальнейшем (п. 19) будет показано, что это не случайно.

Сравнивая (20) и (24), видим, что структура фундаментальной системы решений определяется не только характеристическими числами системы [они для систем (17) и (21) одни и те же!].

Рассмотрим три примера на нахождение общего решения системы в случае наличия кратных корней.

Пример 3. Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4y - z, \\ \frac{dz}{dx} &= y + 2z. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \tag{26}$$

имеет один двукратный корень $\lambda_{1,2} = 3$. Поэтому существует решение вида

$$y = (A_1 x + A_2)\, e^{3x}, \quad z = (B_1 x + B_2)\, e^{3x}. \tag{27}$$

Подставляя его в систему (25) и сокращая на e^{3x}, получим

$$\left.\begin{aligned} 3(A_1 x + A_2) + A_1 &= 4(A_1 x + A_2) - (B_1 x + B_2), \\ 3(B_1 x + B_2) + B_1 &= A_1 x + A_2 + 2(B_1 x + B_2) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (-A_1 + B_1)x + A_1 - A_2 + B_2 &= 0, \\ (B_1 - A_1)x + B_1 + B_2 - A_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Отсюда получаем систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных A_1, A_2, и B_1, B_2:

$$-A_1+B_1=0,\ A_1-A_2+B_2=0,\ B_1-A_1=0,\ B_1+B_2-A_2=0, \quad (30)$$

среди которых независимых лишь два:

$$B_1-A_1=0,\ A_1-A_2+B_2=0. \quad (31)$$

Из этих уравнений находим: $B_1=A_1$, $B_2=A_2-A_1$, причем, как и следовало ожидать, два коэффициента (A_1 и A_2) остаются произвольными.

Таким образом, система (25) имеет следующее решение:

$$y=(A_1x+A_2)e^{3x},\ z=(A_1x+A_2-A_1)e^{3x}. \quad (32)$$

Это и есть общее решение. В качестве фундаментальной системы решений можно взять:

$$\left.\begin{aligned} &y_1=xe^{3x}, \quad z_1=(x-1)e^{3x},\\ &y_2=e^{3x}, \quad z_2=e^{3x}. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx}&=y_2+y_3,\\ \frac{dy_2}{dx}&=y_1+y_2-y_3,\\ \frac{dy_3}{dx}&=y_2+y_3. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0, \quad -\lambda(1-\lambda)^2=0 \quad (35)$$

имеет один простой корень $\lambda_1=0$ и один двукратный $\lambda_{2,3}=1$.

Корню $\lambda_1=0$ соответствует решение

$$y_{11}=\gamma_1,\ y_{12}=\gamma_2,\ y_{13}=\gamma_3, \quad (36)$$

где в качестве γ_1, γ_2, и γ_3 можно взять алгебраические дополнения первой строки матрицы

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|. \quad (37)$$

Получаем $\gamma_1=2$, $\gamma_2=-1$, $\gamma_3=1$, так что имеем

$$y_{11}=2,\ y_{12}=-1,\ y_{13}=1. \quad (38)$$

Двукратному характеристическому числу $\lambda_{2,3}=1$ соответствует решение вида

$$y_1=(A_1x+A_2)e^x,\ y_2=(B_1x+B_2)e^x,\ y_3=(C_1x+C_2)e^x. \quad (39)$$

Подставляя эти выражения в систему (34) и сокращая на e^x, получим:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+A_2+A_1&=(B_1+C_1)x+B_2+C_2,\\ B_1x+B_2+B_1&=(A_1+B_1-C_1)x+A_2+B_2-C_2,\\ C_1x+C_2+C_1&=(B_1+C_1)x+B_2+C_2. \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 - B_1 - C_1 = 0, & A_2 + A_1 - B_2 - C_2 = 0, \\ -A_1 + C_1 = 0, & B_2 + B_1 - A_2 - B_2 + C_2 = 0, \\ -B_1 = 0, & C_2 + C_1 - B_2 - C_2 = 0; \\ \multicolumn{2}{c}{B_1 = 0, \ C_1 = A_1, \ B_2 = A_1, \ C_2 = A_2.} \end{array}\right\}$$

Поэтому

$$y_1 = (A_1x + A_2)\, e^x, \ y_2 = A_1 e^x, \ y_3 = (Ax + A_2)\, e^x.$$

Фундаментальной системой решений будет

$$\begin{array}{ccc} 2, & -1, & 1, \\ xe^x, & e^x, & xe^x, \\ e^x, & 0, & e^x, \end{array}$$

а общее решение имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 2C_1 + (C_2x + C_3)\, e^x, \\ y_2 = -C_1 + C_2\, e^x, \\ y_3 = C_1 + (C_2x + C_3)\, e^x. \end{array}\right\}$$

Пример 5. Дана система:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2 - y_3. \end{array}\right\}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,\,3} = -2$.

Найдем соответствующие решения. Имеем:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11} = \gamma_1 e^x, \ y_{12} = \gamma_2 e^x, \ y_{13} = \gamma_3 e^x; \\ \left.\begin{array}{l} -2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \end{array}\right\} \ \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = 1; \\ y_{11} = e^x, \ y_{12} = e^x, \ y_{13} = e^x; \end{array}\right\}$$

$$y_1 = (A_1x + A_2)\, e^{-2x}, \ y_2 = (B_1x + B_2)\, e^{-2x}, \ y_3 = (C_1x + C_2)\, e^{-2x};$$

$$\left.\begin{array}{l} -2(A_1x + A_2) + A_1 = (-A_1 + B_1 + C_1)\, x - A_2 + B_2 + C_2, \\ -2(B_1x + B_2) + B_1 = (A_1 - B_1 + C_1)\, x + A_2 - B_2 + C_2, \\ -2(C_1x + C_2) + C_1 = (A_1 + B_1 - C_1)\, x + A_2 + B_2 - C_2; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -A_1 - B_1 - C_1 = 0, \ -A_2 + A_1 - B_2 - C_2 = 0, \\ -B_1 - A_1 - C_1 = 0, \ -B_2 + B_1 - A_2 - C_2 = 0, \\ -C_1 - A_1 - B_1 = 0, \ -C_2 + C_1 - A_2 - B_2 = 0; \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 + B_1 + C_1 = 0,\ A_1 - B_1 = 0,\ B_1 - C_1 = 0; \\ A_1 = B_1 = C_1 = 0,\ C_2 = -(A_2 + B_2); \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

$$y_1 = A_2 e^{-2x},\ y_2 = B_2 e^{-2x},\ y_3 = -(A_2 + B_2)\, e^{-2x}, \tag{52}$$

где A_2 и B_2 — произвольны.

Фундаментальной системой решений будет

$$\left.\begin{matrix} e^x, & e^x, & e^x, \\ e^{-2x}, & 0, & -e^{-2x}, \\ 0, & e^{-2x}, & e^{-2x}. \end{matrix}\right\} \tag{53}$$

Несмотря на то, что среди характеристических чисел есть кратное, фундаментальную систему решений мы получили здесь (как и в примере 1) в том же виде, что и в случае, когда все характеристические числа простые.

Общее решение данной системы (34) имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 &= C_1 e^x + C_3 e^{-2x}, \\ y_3 &= C_1 e^x - C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-2x}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

§ 5. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

14. Приведем кратко основные сведения из теории (квадратных) матриц, которые понадобятся для дальнейшего изложения.

Квадратной матрицей n-го порядка называется символ

$$A = \|a_{ik}\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

$$\{A\}_{ik} = a_{ik} \tag{2}$$

— *элементы* матрицы A суть числа или функции.

Под матрицей $\|a\|$ понимается матрица, все элементы которой равны a. Матрица $0 = \|0\|$ называется *нулевой* матрицей.

Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образует *главную диагональ* матрицы A, а их сумма

$$\sigma(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{3}$$

называется *следом* этой матрицы.

Матрица вида

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_2 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots a_n \end{Vmatrix} = [a_1, a_2, \dots, a_n] \tag{4}$$

называется *диагональной* матрицей. Важным частным случаем ее является *единичная матрица*

$$I = E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} = [1,\ 1,\ \dots,\ 1]. \tag{5}$$

Мы будем рассматривать число a как диагональную матрицу (любого порядка)

$$a = [a,\ a,\ \dots,\ a]. \tag{6}$$

Если матрица A порядка n имеет вид

$$A = \begin{Vmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_s} \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

где $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_s$ — квадратные матрицы порядков k_1, $k_2,\ \dots,\ k_s$ $(k_1 + k_2 + \dots + k_s = n)$, главные диагонали которых составляют главную диагональ матрицы A, а все элементы матрицы A, не принадлежащие матрицам $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_s$, равны нулю, то матрица A называется *квазидиагональной матрицей структуры* $\{k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_s\}$ и обозначается так:

$$A = [A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_s]. \tag{8}$$

При этом некоторые из матриц A_k (но не все) могут вырождаться в один диагональный элемент матрицы A.

Определитель

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

называется *определителем матрицы* A. Если $D(A) \neq 0$, то матрица A называется *неособенной*. Если $D(A) = 0$, то матрица A называется *особенной*.

Две матрицы считаются равными, если соответствующие их элементы равны

$$A = B, \text{ если } \{A\}_{ik} = \{B\}_{ik} \ (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n). \tag{10}$$

Сложение матриц A и B сводится к сложению соответствующих элементов этих матриц

$$\{A+B\}_{ik}=\{A\}_{ik}+\{B\}_{ik}. \tag{11}$$

Произведение матриц A и B определяется равенством

$$\{AB\}_{ik}=\sum_{l=1}^{n}\{A\}_{il}\cdot\{B\}_{lk}\quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{12}$$

(т. е. матрицы перемножаются по одному из правил умножения определителей, а именно — по правилу умножения **строк на столбцы**). При этом

$$D(AB)=D(A)\,D(B). \tag{13}$$

Если

$$A\cdot B=B\cdot A, \tag{14}$$

то говорят, что матрицы A и B *коммутируют*.

Если матрицы A и B диагональные, то их умножение сводится к умножению соответствующих диагональных элементов этих матриц

$$\left.\begin{aligned} A=[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n],\ B=[b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n];\\ AB=[a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_nb_n]. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Если A и B — квазидиагональные матрицы одной и той же структуры

$$A=[A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s],\ B=[B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_s], \tag{16}$$

то

$$AB=[A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_sB_s]. \tag{17}$$

Умножение матрицы A на число λ сводится к умножению всех элементов матрицы A на число λ:

$$\{A\lambda\}_{ik}=\{A\}_{ik}\cdot\lambda. \tag{18}$$

Целая положительная степень матрицы A определяется (рекуррентно) равенством

$$A^m=A^{m-1}A\quad (m\geqslant 2). \tag{19}$$

Степени диагональных и квазидиагональных матриц вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} A=[a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n],\quad A^m=[a_1^m,\ a_2^m,\ \ldots,\ a_n^m],\\ A=[A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_s],\ A^m=[A_1^m,\ A_2^m,\ \ldots,\ A_s^m]. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Под нулевой степенью матрицы A понимается единичная матрица того же порядка

$$A^0=I. \tag{21}$$

Матрица A^{-1} называется *обратной матрицей* по отношению к матрице A, если

$$AA^{-1}=I \quad \text{или} \quad A^{-1}\cdot A=I. \tag{22}$$

Для всякой неособенной матрицы A существует обратная матрица (почему?).

Матрица A^* называется *транспонированной* по отношению к матрице A, если она получена из матрицы A перестановкой строк и столбцов. При этом

$$(AB)^*=B^*A^*. \tag{23}$$

Две матрицы A и B называются *подобными*, если они связаны соотношением

$$B=SAS^{-1}, \tag{24}$$

где S — некоторая неособенная матрица. Преобразование, при помощи которого здесь из матрицы A получается матрица B, называется *преобразованием подобия с матрицей подобия* S.

Дадим понятие о характеристических числах и элементарных делителях матрицы, которые используются ниже (пп. **19—20**) для интегрирования однородной линейной системы с постоянными коэффициентами матричным методом.

Пусть дана матрица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{25}$$

элементы которой суть постоянные числа. Матрица

$$A-\lambda I=\begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{Vmatrix} \tag{26}$$

называется *характеристической матрицей* для A, а ее определитель

$$D(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{27}$$

— *характеристическим определителем* или *характеристическим полиномом* матрицы A; уравнение

$$D(A-\lambda I)=0 \tag{28}$$

называется *характеристическим уравнением*, а его корни — *характеристическими числами* матрицы A.

Дадим понятие об элементарных делителях матрицы A, соответствующих характеристическому числу λ_1 кратности $k (k \geqslant 1)$. Определитель $D(A-\lambda I)$ делится (без остатка) на $(\lambda-\lambda_1)^k$. Найдем общий наибольший делитель $(\lambda-\lambda_1)^{k_1}$ всех определителей $(n-1)$-го порядка, получающихся из характеристического определителя $D(A-\lambda I)$ вычеркиванием одной строки и одного столбца. Если окажется, что $k_1 \neq 0$, то найдем общий наибольший делитель $(\lambda-\lambda_1)^{k_2}$ всех определителей $(n-2)$-го порядка, получающихся из $D(A-\lambda I)$ вычеркиванием двух строк и двух столбцов. Продолжая этот процесс, мы найдем общий наибольший делитель $(\lambda-\lambda_1)^{k_m}$ определителей порядка $n-m$, полученных из $D(A-\lambda I)$ вычеркиванием m строк и m столбцов, причем хоть один из определителей порядка $n-(m+1)$ уже не делится ни на какую положительную степень $\lambda-\lambda_1$. Можно доказать, что

$$k > k_1 > k_2 > \ldots > k_m > 0. \tag{29}$$

Составим выражения:

$$(\lambda-\lambda_1)^{l_1}, \quad (\lambda-\lambda_1)^{l_2}, \ldots, \quad (\lambda-\lambda_1)^{l_{m+1}}, \tag{30}$$

где

$$l_1 = k-k_1, \; l_2 = k_1-k_2, \ldots, \; l_m = k_{m-1}-k_m, \; l_{m+1} = k_m, \tag{31}$$

так что

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_{m+1} = k. \tag{32}$$

Выражения (30), очевидно, являются делителями $D(A-\lambda I)$. Они называются *элементарными делителями* матрицы A, соответствующими характеристическому числу λ_1. Отметим, что сумма показателей всех элементарных делителей, соответствующих данному характеристическому числу, равна его кратности. Если какой-нибудь из показателей l_i равен единице, то соответствующий элементарный делитель $\lambda-\lambda_1$ называется *простым*, в противном случае говорят, что элементарный делитель $(\lambda-\lambda_1)^{l_\mu}$ $(l_\mu > 1)$ — *непростой*.

Очевидно, что если λ_1 — простое характеристическое число, то ему соответствует только один и притом простой элементарный делитель

$$\lambda-\lambda_1. \tag{33}$$

В самом деле, в этом случае $k=1$ и хоть один из определителей $(n-1)$-го порядка уже не делится на $\lambda-\lambda_1$ (почему?), так что „цепочка“ (29) обрывается на первом члене, и мы получаем элементарный делитель (33).

В случае, когда $k > 1$, могут иметь место различные комбинации элементарных делителей. Наиболее интересными из них являются случаи, когда характеристическому числу λ_1 отвечает только один элементарный делитель и когда число этих элементарных делителей наибольшее, т. е. равно k. В первом случае имеем непростой элементарный делитель

$$(\lambda-\lambda_1)^k, \tag{34}$$

степень которого равна кратности характеристического числа. Во втором случае имеем k простых элементарных делителей

$$\lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda-\lambda_1.$$

Найдя элементарные делители, соответствующие всем характеристическим числам матрицы A, получим совокупность всех элементарных делителей матрицы A, которую мы будем записывать в виде

$$(\lambda-\lambda_1)^{\rho_1},\quad (\lambda-\lambda_2)^{\rho_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_s)^{\rho_s}, \tag{35}$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ — целые числа, причем $1 \leqslant \rho_m \leqslant n$ и $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s=n$ (сумма показателей всех элементарных делителей матрицы A равна ее порядку). Среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ могут быть и равные (почему?).

Пример 1. Найдем элементарные делители матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{36}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } \lambda^2+1=0. \tag{37}$$

Оно имеет простые корни $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. Поэтому матрица A имеет простые элементарные делители

$$\lambda-i,\ \lambda+i. \tag{38}$$

Пример 2. Рассмотрим матрицу порядка $\rho>1$ вида

$$I_\rho(a)=\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \end{Vmatrix}. \tag{39}$$

Характеристическое уравнение

$$D\left[I_\rho(a)-\lambda I\right]=\begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{40}$$

имеет один корень $\lambda_1 = a$ кратности ρ. Так как определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из $D\left[I_\rho(a) - \lambda I\right]$ вычеркиванием первой строки и последнего столбца, будучи равным единице, не делится ни на какую степень разности $\lambda - a$, то матрица $I_\rho(a)$ имеет только один элементарный делитель

$$(\lambda - a)^\rho. \tag{41}$$

Пример 3. Пусть даны две матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}. \tag{42}$$

Обе матрицы A и B имеют одно и то же характеристическое число $\lambda_1 = 2$ кратности 2. Но элементарные делители их не совпадают.

Действительно, матрица A имеет два простых элементарных делителя

$$\lambda - 2, \quad \lambda - 2, \tag{43}$$

а матрица B — один непростой элементарный делитель

$$(\lambda - 2)^2 \tag{44}$$

(почему?).

Пример 4. Матрица

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix} \tag{45}$$

имеет только одно характеристическое число $\lambda_1 = -2$ кратности 3. Ему соответствуют два элементарных делителя:

$$(\lambda + 2)^2, \quad \lambda + 2, \tag{46}$$

из которых один непростой, другой простой (почему?). Других элементарных делителей у матрицы A нет.

Пример 5. Рассмотрим квазидиагональную матрицу шестого порядка вида

$$A = [I_3(2), \quad I_1(4), \quad I_2(-1)]. \tag{47}$$

Здесь под $I_1(4)$ понимается матрица, вырождающаяся в один диагональный элемент матрицы A, именно: $I_1(4) = a_{44} = 4$.

Матрица (47) имеет характеристические числа $\lambda_1 = 2$ кратности 3, $\lambda_2 = 4$ — простое характеристическое число и $\lambda_3 = -1$ — кратности 2.

Элементарными делителями матрицы (47) будут

$$(\lambda - 2)^3, \quad \lambda - 4, \quad (\lambda + 1)^2 \tag{48}$$

(почему?).

Пусть матрица A имеет элементарные делители (35). Рассмотрим наряду с матрицей A квазидиагональную матрицу вида

$$[I_{\rho_1}(\lambda_1), \ I_{\rho_2}(\lambda_2), \ \ldots, \ I_{\rho_s}(\lambda_s)] \quad (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n), \tag{49}$$

где под $I_1(\lambda_m)$ понимается число λ_m. Нетрудно убедиться, что матрица (49) имеет те же элементарные делители, что и матрица A. Матрица (49) называется *канонической матрицей*.

соответствующей матрице A, или *каноническим видом* матрицы A. Если все элементарные делители матрицы A простые

$$\lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda-\lambda_n, \tag{50}$$

где среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ могут быть и равные, то матрица (49) обратится в диагональную матрицу

$$[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n], \tag{51}$$

так что в этом случае каноническим видом матрицы A будет диагональная матрица (51).

Всякую матрицу A можно привести к каноническому виду.

Теорема. *Если матрица A имеет элементарные делители* (35),

$$(\lambda-\lambda_1)^{\rho_1},\quad (\lambda-\lambda_2)^{\rho_2},\ \ldots,\ (\lambda-\lambda_s)^{\rho_s},$$

где

$$\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s=n,$$

то существует такая неособенная матрица S, что

$$SAS^{-1}=[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)]. \tag{52}$$

Доказательство этой теоремы читатель найдет в Курсе высшей математики В. И. Смирнова.*

Преобразование, при помощи которого здесь матрица A приводится к каноническому виду (49), есть преобразование подобия с матрицей подобия S (матрицы A и $[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)]$ подобны). Оно обладает тем замечательным свойством, что не нарушает ни характеристических чисел, ни элементарных делителей данной матрицы.

Пример 6. Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\end{Vmatrix}. \tag{53}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -2\\ 0 & 2 & -\lambda\end{vmatrix}=0, \text{ или } (-1-\lambda)(\lambda^2+4)=0, \tag{54}$$

имеет простые корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2i$, $\lambda_3=-2i$, так что элементарные делители матрицы A (заведомо) простые: $\lambda+1$, $\lambda-2i$, $\lambda+2i$ и каноническим видом матрицы A будет чисто диагональная матрица

$$\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2i & 0\\ 0 & 0 & -2i\end{Vmatrix}. \tag{55}$$

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. I. М., Гостехиздат, 1949, стр. 106—112; ч. 2, 1949, добавление.

Пример 7. Привести матрицу

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{Vmatrix} \tag{56}$$

к каноническому виду.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0, \tag{57}$$

имеет один корень $\lambda_1 = -2$ кратности 2, причем ему соответствует один непростой элементарный делитель $(\lambda+2)^2$ (почему?). Поэтому каноническим видом матрицы (56) будет

$$\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}. \tag{58}$$

Для изложения интегрирования линейных систем матричным методом, кроме указанных выше сведений, потребуются еще понятие о дифференцировании и интегрировании матрицы и понятие об экспоненциальной функции от матрицы.

Пусть дана матрица

$$Z(x) = \begin{Vmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) & \dots & z_{1n}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) & \dots & z_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1}(x) & z_{n2}(x) & \dots & z_{nn}(x) \end{Vmatrix}. \tag{59}$$

Если все элементы матрицы $Z(x)$ непрерывны в интервале (a, b), то матрица $Z(x)$ называется *непрерывной* в этом интервале.

Предположим, что все элементы матрицы $Z(x)$ дифференцируемы в интервале (a, b). Тогда матрицу, полученную дифференцированием всех элементов матрицы $Z(x)$, будем называть *производной от матрицы* $Z(x)$ и обозначать через $\frac{dZ(x)}{dx}$:

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \begin{Vmatrix} z'_{11}(x) & z'_{12}(x) & \dots & z'_{1n}(x) \\ z'_{21}(x) & z'_{22}(x) & \dots & z'_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z'_{n1}(x) & z'_{n2}(x) & \dots & z'_{nn}(x) \end{Vmatrix}. \tag{60}$$

Если $A = \text{const}$, то $\frac{dA}{dx} = 0$.

Для матриц справедливы те же правила дифференцирования, что и для обычных функций:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d(AZ)}{dx}=A\frac{dZ}{dx}, \quad \frac{d(\lambda Z)}{dx}=\lambda\frac{dZ}{dx},\\ &\frac{d(Z_1+Z_2)}{dx}=\frac{dZ_1}{dx}+\frac{dZ_2}{dx},\\ &\frac{d(Z_1\cdot Z_2)}{dx}=\frac{dZ_1}{dx}Z_2+Z_1\frac{dZ_2}{dx}, \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

причем в последней формуле нельзя переставлять сомножители.

Если матрица Z коммутирует со своей производной

$$Z\frac{dZ}{dx}=\frac{dZ}{dx}Z, \tag{62}$$

то производная от целой положительной степени матрицы Z находится по правилу

$$\frac{dZ^m}{dx}=mZ^{m-1}\frac{dZ}{dx}. \tag{63}$$

Интеграл от матрицы $Z(x)$ определяется равенством

$$\int Z(x)\,dx=\left\|\int z_{ik}(x)\,dx\right\| \tag{64}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} Z(x)dx=\left\|\int_{x_0}^{x} z_{ik}(x)\,dx\right\| \tag{65}$$

в предположении, что все элементы матрицы $Z(x)$ суть интегрируемые функции.

Так же как и для обычных функций, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} A\,dx=A(x-x_0),\\ &\int_{x_0}^{x} AZ(x)\,dx=A\int_{x_0}^{x} Z(x)\,dx,\\ &\int_{x_0}^{x} [Z_1(x)+Z_2(x)]\,dx=\int_{x_0}^{x} Z_1(x)\,dx+\int_{x_0}^{x} Z_2(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Экспоненциальная функция от матрицы Z определяется равенством

$$e^Z=I+Z+\frac{1}{2!}Z^2+\ldots+\frac{1}{\nu!}Z^\nu+\ldots=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{Z^\nu}{\nu!}, \tag{67}$$

где I — единичная матрица того же порядка, что и Z, а матричный ряд справа равносилен n^2 обычным рядам с вещественными или комплексными членами, так что

$$\{e^Z\}_{ik} = \delta_{ik} + \{Z\}_{ik} + \frac{1}{2!}\{Z^2\}_{ik} + \ldots + \frac{1}{\nu!}\{Z^\nu\}_{ik} + \ldots, \tag{68}$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } k = i, \\ 0 \text{ при } k \neq i. \end{cases} \tag{69}$$

Если $A \cdot B = B \cdot A$, то

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}, \quad Ae^B = e^B A. \tag{70}$$

Экспоненциальная функция от чисто диагональной, или квазидиагональной, матрицы является соответственно чисто диагональной, или квазидиагональной, матрицей:

$$\left.\begin{aligned} e^{[a_1, a_2, \ldots, a_n]} &= [e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_n}], \\ e^{[A_1, A_2, \ldots, A_s]} &= [e^{A_1}, e^{A_2}, \ldots, e^{A_s}] \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

(почему?).

Производная от экспоненциальной функции от матрицы $Z = Z(x)$ определяется как результат формального почленного дифференцирования ряда (67). При этом, если матрица Z коммутирует со своей производной, то

$$\frac{d(e^Z)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Z^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{dZ}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{Z^\nu}{\nu!}\frac{dZ}{dx} = e^Z \frac{dZ}{dx}, \tag{72}$$

или

$$\frac{d(e^Z)}{dx} = e^Z \frac{dZ}{dx}. \tag{73}$$

В частности, при $Z = Ax$, где A — постоянная матрица, имеем:

$$\frac{d(e^{Ax})}{dx} = e^{Ax} A = Ae^{Ax}. \tag{74}$$

15. Пусть дана однородная линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} p_{lk}(x) z_l \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{75}$$

коэффициенты которой определены и непрерывны в интервале (a, b). Тогда она имеет фундаментальную систему решений

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{76}$$

Подставляя эти решения в систему (75), получим n^2 тождеств:

$$\frac{dy_{ik}}{dx} \equiv \sum_{l=1}^{n} p_{lk}(x) y_{il} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n, a < x < b). \tag{77}$$

Эти n^2 тождеств можно записать в виде одного матричного тождества

$$\frac{dY}{dx} \equiv Y \cdot P \quad (a < x < b), \tag{78}$$

если ввести в рассмотрение две матрицы: матрицу фундаментальной системы решений

$$Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{Vmatrix} \tag{79}$$

и транспонированную матрицу коэффициентов системы (75)

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{Vmatrix} \tag{80}$$

(почему?).

Рассмотрим матричное уравнение

$$\frac{dY}{dx} = YP, \tag{81}$$

где Y — неизвестная матрица, а $P = P(x)$ — заданная матрица, определенная и непрерывная в интервале (a, b). *Решением* или *интегральной матрицей* уравнения (81) в интервале (a, b) называется всякая неособенная непрерывно дифференцируемая* в этом интервале матрица $Y = Y(x)$, обращающая уравнение (81) в тождество

$$\frac{dY(x)}{dx} \equiv Y(x) P(x) \quad (a < x < b). \tag{82}$$

Из предыдущего следует, что матрица (79) является решением матричного уравнения (81). Обратно, всякое решение матричного уравнения (81) является матрицей некоторой фундаментальной системы решений однородной линейной системы (75) (почему?). Поэтому уравнение (81) называется *матричным уравнением, соответствующим системе* (75).

Значение интегральной матрицы Y в точке $x = x_0 \in (a; b)$ называется *начальным значением* этой матрицы. Обозначая его через Y_0, имеем $Y_0 = Y(x_0)$. Нахождение интегральной матрицы, имеющей начальное значение Y_0, равносильно решению n задач Коши для соответствующей системы (75). Если $Y_0 = I$, то интегральная матрица Y называется *нормированной*

---

* Т. е. производные всех элементов матрицы $Y(x)$ непрерывны в интервале (a, b).

в точке $x = x_0$. Из теоремы Пикара следует, что существует только одна интегральная матрица, имеющая заданное начальное значение Y_0 в точке $x = x_0 \in (a, b)$. В частности, существует только одна интегральная матрица, нормированная в этой точке.

Заметим, что если транспонировать обе части уравнения (81), то получим

$$\frac{dY^*}{dx} = P^* Y^*. \tag{83}$$

Интегральной матрице этого уравнения тоже соответствует фундаментальная система решений однородной линейной системы (75). Но в матрице Y^* решения расположены не по строкам, а по столбцам. С учетом этого замечания всегда вместо уравнения (81) можно использовать уравнение (83), представляющее собой, так же как и уравнение (81), матричную запись системы (75).

Отметим, что, решая систему (75) матричным методом, мы находим сразу всю фундаментальную систему решений, по которой известным способом находится общее решение. Это особенно легко удается сделать, если коэффициенты системы постоянны (см. ниже, п. 19). Матричный метод с большим успехом используется для исследования свойств решений линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

16. Матричное уравнение (81) инвариантно относительно любой замены независимой переменной

$$x = \varphi(t) \tag{84}$$

и относительно неособенного преобразования искомой матрицы

$$Y = QZ, \tag{85}$$

где Q — неособенная матрица (почему?).

17. Интегральные матрицы уравнения (81) обладают двумя свойствами, аналогичными свойствам решений однородного линейного уравнения первого порядка.

1) Всякая интегральная матрица Y_1 уравнения (81) после умножения слева на любую постоянную неособенную матрицу C остается интегральной матрицей, т. е. если Y_1 — интегральная матрица, то

$$Y = CY_1, \tag{86}$$

где $D(C) \neq 0$ тоже есть интегральная матрица.

В самом деле, мы имеем:

$$\frac{dY_1}{dx} = Y_1 P \quad (a < x < b). \tag{87}$$

Поэтому, подставляя в (81) вместо Y матрицу CY_1, получим:

$$\frac{d(CY_1)}{dx}=C\frac{dY_1}{dx}=CY_1P,\quad \frac{d(CY_1)}{dx}=(CY_1)P. \tag{88}$$

2) Все интегральные матрицы уравнения (81) содержатся в формуле (86), т. е. получаются из нее при соответствующем выборе матрицы C.

В самом деле, пусть $\widetilde{Y}=\widetilde{Y}(x)$ есть любая интегральная матрица. Возьмем некоторую точку $x=x_0\in(a, b)$* и положим, что $\widetilde{Y}_0$ есть начальное значение матрицы $\widetilde{Y}$ в этой точке. Тогда, полагая в (86) $x=x_0$, $Y=\widetilde{Y}_0$, имеем

$$\widetilde{Y}_0=CY_1(x_0), \tag{89}$$

откуда

$$\widetilde{Y}_0Y_1^{-1}(x_0)=C \tag{90}$$

(чтобы найти C, мы умножили обе части равенства (89) на $Y_1^{-1}(x_0)$ справа). Подставляя найденное значение C в формулу (86), получим:

$$Y=\widetilde{Y}_0Y_1^{-1}(x_0)\,Y_1. \tag{91}$$

Эта интегральная матрица имеет в точке $x=x_0$ начальное значение $\widetilde{Y}_0$ и, следовательно, совпадает с матрицей $\widetilde{Y}=\widetilde{Y}(x)$ (почему?):

$$\widetilde{Y}=\widetilde{Y}_0Y_1^{-1}(x_0)\,Y_1. \tag{92}$$

Таким образом, матрица $\widetilde{Y}$ содержится в формуле (86).

Из установленного свойства вытекает, что любые две фундаментальные системы решений Y_1 и Y_2 однородной линейной системы дифференциальных уравнений (75) тесно связаны между собою: они могут быть получены одна из другой при помощи неособенного линейного преобразования

$$Y_2=CY_1. \tag{93}$$

Если, в частности, Y_1 нормирована в точке $x=x_0$, то все фундаментальные системы выражаются через Y_1 по формуле

$$Y=Y(x_0)\,Y_1. \tag{94}$$

18. Если в матричном уравнении (81) матрица $P(x)$ обладает тем свойством, что она коммутирует со своим интегралом, т. е.

* Напоминаем, что (a, b) есть интервал непрерывности матрицы $P(x)$.

$$P(x)\cdot\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx=\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx\cdot P(x), \tag{95}$$

то в качестве интегральной матрицы можно взять

$$Y_1=e^{\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx} \tag{96}$$

(почему?). Заметим, что Y_1 нормирована в точке $x=x_0$ (почему?).

19. Применим матричный метод к интегрированию однородной линейной системы с постоянными коэффициентами и выяснению структуры фундаментальной системы решений. Пусть дана система

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n} a_{lk}y_l, \tag{97}$$

где a_{lk} — постоянные вещественные числа. Этой системе соответствует матричное уравнение

$$\frac{dY}{dx}=YA, \tag{98}$$

где A — транспонированная матрица коэффициентов системы (97), а Y — матрицы фундаментальной системы решений.

Так как матрица A, очевидно, удовлетворяет условию (95), то за интегральную матрицу уравнения (98) можно взять

$$Y_1=e^{Ax}\quad (x_0=0). \tag{99}$$

Выясним структуру матрицы (99) и тем самым структуру фундаментальной системы решений однородной линейной системы дифференциальных уравнений (97). Покажем, что структура интегральной матрицы (99) вполне определяется элементарными делителями матрицы A [т. е. матрицы коэффициентов системы (97)].

Рассмотрим сначала случай, когда матрица A *каноническая*. Если матрица A чисто диагональная

$$A=[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n], \tag{100}$$

так что элементарные делители ее простые:

$$\lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda-\lambda_n \tag{101}$$

(среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ могут быть и равные), то интегральная матрица (99) принимает вид

$$Y_1=e^{[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]x}=e^{[\lambda_1 x, \lambda_2 x, \ldots, \lambda_n x]}=$$
$$=\left[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\right], \tag{102}$$

или

$$Y_1 = \left[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\right], \tag{103}$$

т. е. интегральная матрица есть чисто диагональная матрица. В случае, когда матрица A каноническая, но квазидиагональная

$$A = \left[I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \ldots, I_{\rho_s}(\lambda_s)\right] \quad (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_s = n), \tag{104}$$

так что среди элементарных делителей

$$(\lambda - \lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda - \lambda_2)^{\rho_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_s)^{\rho_s} \tag{105}$$

(среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ могут быть и равные) имеются непростые, интегральная матрица (99) уже не будет чисто диагональной. Она имеет вид

$$Y_1 = e^{\left[I_{\rho_1}(\lambda_1), I_{\rho_2}(\lambda_2), \ldots, I_{\rho_s}(\lambda_s)\right]x} = e^{\left[I_{\rho_1}(\lambda_1)x, I_{\rho_2}(\lambda_2)x, \ldots, I_{\rho_s}(\lambda_s)x\right]} =$$
$$= \left[e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \ldots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}\right], \tag{106}$$

или

$$Y_1 = \left[e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)x}, e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)x}, \ldots, e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)x}\right]. \tag{107}$$

Это квазидиагональная матрица, причем

$$e^{I_\rho(\lambda)x} = \begin{Vmatrix} e^{\lambda x} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{x^2}{2!} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)!} e^{\lambda x} & \frac{x^{\rho-2}}{(\rho-2)!} e^{\lambda x} & \ldots & xe^{\lambda x} & e^{\lambda x} \end{Vmatrix}, \tag{108}$$

если $\rho > 1$ и

$$e^{I_1(\lambda)x} = e^{\lambda x} \tag{109}$$

(почему?).

В интегральной матрице Y_1 каждому непростому элементарному делителю $(\lambda - \lambda_\mu)^{\rho_\mu}$ соответствует группа, состоящая из ρ_μ решений, причем все решения этой группы получаются из последнего решения последовательным дифференцированием коэффициентов при показательных функциях. Простому элементарному делителю $\lambda - \lambda_m$ соответствует группа, состоящая из одного решения вида

$$0, 0, \ldots, e^{\lambda_m x}, 0, \ldots, 0. \tag{110}$$

Общее число таких групп равно s (числу элементарных делителей матрицы A).

Заметим, что простому корню характеристического уравнения матрицы A соответствует, очевидно, одна группа, состоящая из одного решения. Что касается кратного корня, то ему может соответствовать как одна, так и несколько групп, но число их не превышает кратности корня (почему?). При этом корню кратности k всегда будут соответствовать ровно k линейно независимых частных решений (почему?).

20. Рассмотрим общий случай, когда A — произвольная неканоническая матрица. Приведем матрицу A к каноническому виду при помощи преобразования подобия (см. стр. 349), т. е. найдем такую неособенную матрицу S, чтобы матрица

$$B = SAS^{-1} \tag{111}$$

была канонической. Тогда, полагая в уравнении (98)

$$Y = ZS, \tag{112}$$

где Z — новая неизвестная интегральная матрица, получим

$$\frac{dZ}{dx} S = ZSA, \quad \frac{dZ}{dx} = ZSAS^{-1}, \tag{113}$$

или

$$\frac{dZ}{dx} = ZB. \tag{114}$$

Это уравнение того же вида, что и (98), но уже с канонической матрицей.

Так как уравнение (114) имеет интегральную матрицу

$$Z_1 = e^{Bx}, \tag{115}$$

то в качестве интегральной матрицы данного уравнения (98) можно взять

$$Y_1 = e^{Bx}S. \tag{116}$$

Выясним структуру матрицы Y_1. Она, очевидно, определяется структурой матрицы Z_1, а последняя, в свою очередь, — элементарными делителями матрицы B, которые совпадают с элементарными делителями матрицы A. Так что в конечном итоге структура интегральной матрицы Y_1 определяется элементарными делителями матрицы A.

Если матрица A имеет простые элементарные делители

$$\lambda - \lambda_1, \ \lambda - \lambda_2, \ \ldots, \ \lambda - \lambda_n, \tag{117}$$

то

$$B = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]. \tag{118}$$

Поэтому

$$Y_1 = e^{Bx}S = [e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}]\, S. \tag{119}$$

Пусть

$$S=\begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{120}$$

Тогда

$$Y_1=\begin{Vmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n x} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} s_{11}e^{\lambda_1 x} & s_{12}e^{\lambda_1 x} & \dots & s_{1n}e^{\lambda_1 x} \\ s_{21}e^{\lambda_2 x} & s_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & s_{2n}e^{\lambda_2 x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1}e^{\lambda_n x} & s_{n2}e^{\lambda_n x} & \dots & s_{nn}e^{\lambda_n x} \end{Vmatrix}. \tag{121}$$

Таким образом, в случае, когда все элементарные делители матрицы A простые, то независимо от того, будут все корни характеристического уравнения простыми или среди них имеются кратные, фундаментальная система решений имеет ту же структуру, что и в случае различных корней характеристического уравнения: в состав решений входят только показательные функции с некоторыми постоянными коэффициентами. При этом комплексным характеристическим числам будут соответствовать комплексные решения. Но их всегда можно заменить вещественными, отделяя вещественные и мнимые части. В результате мы всегда получим фундаментальную систему решений, состоящую из вещественных функций.

Выясним структуру интегральной матрицы (116) в случае, когда среди элементарных делителей имеются непростые. Пусть

$$(\lambda-\lambda_1)^{\rho_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{\rho_2},\ \dots,\ (\lambda-\lambda_s)^{\rho_s}\ (\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_s=n) \tag{122}$$

— элементарные делители матрицы A, причем хоть один из показателей ρ_μ больше единицы. Тогда

$$B=\left[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \dots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)\right]. \tag{123}$$

Поэтому

$$Y_1=e^{Bx}S=\left[e^{I_{\rho_1}(\lambda_1)\,x},\ e^{I_{\rho_2}(\lambda_2)\,x},\ \dots,\ e^{I_{\rho_s}(\lambda_s)\,x}\right]S. \tag{124}$$

Выполняя умножение матриц, стоящих в правой части, и принимая во внимание структуру первой из них, нетрудно убедиться, что решения, составляющие интегральную матрицу Y_1, разобьются (так же, как и в случае, когда матрица данной системы (97) есть каноническая квазидиагональная матрица) на s групп (каждому элементарному делителю соответствует своя группа решений), содержащих соответственно $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ решений, причем все решения, принадлежащие μ-той группе, могут быть получены из решения, содержащего множитель x в наибольшей степени $x^{\rho_\mu - 1}$, при помощи последовательного дифференцирования коэффициентов при показательной функции $e^{\lambda_\mu x}$. Поэтому коэффициенты при $e^{\lambda_\mu x}$ у всех решений μ-той группы являются полиномами от x степени не выше, чем $\rho_\mu - 1$.

Отметим, что простому корню характеристического уравнения соответствует одна группа решений, состоящая из одного решения. Корню кратности k соответствует столько групп, сколько ему соответствует элементарных делителей. При этом, так как сумма показателей всех элементарных делителей, соответствующих данному характеристическому числу, равна его кратности, то ему будет отвечать k линейно независимых частных решений.

Таким образом, во всех случаях структура фундаментальной системы решений вполне определяется элементарными делителями матрицы коэффициентов системы.

21. Изложенный выше матричный метод интегрирования однородной линейной системы с постоянными коэффициентами можно резюмировать в виде следующего правила.

Чтобы найти общее решение системы (97) нужно:

а) написать матричное уравнение (98), соответствующее системе (97);

б) привести матрицу A к каноническому виду (111), найдя матрицу S;

в) найти интегральную матрицу Z уравнения (114) с канонической матрицей B;

г) подставить найденную интегральную матрицу Z в формулу (112) и заменить в интегральной матрице Y комплексные решения (если они имеются) соответствующими вещественными решениями, в результате чего получим фундаментальную систему решений системы (97);

д) составить линейные комбинации элементов полученной интегральной матрицы Y (фундаментальной системы решений) по столбцам с произвольными постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Это и есть общее решение системы (97).

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_1. \tag{125}$$

Матричным уравнением, соответствующим системе (125), будет

$$\frac{dY}{dx} = YA, \tag{126}$$

где

$$Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{Vmatrix}, \quad A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{127}$$

Приведем матрицу A к каноническому виду. Здесь характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{128}$$

имеет простые корни $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = -i$. Поэтому каноническим видом матрицы A будет

$$B = \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}. \tag{129}$$

Найдем S. Имеем $B = SAS^{-1}$, $BS = SA$. Пусть

$$S = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}. \tag{130}$$

Тогда

$$\begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{131}$$

откуда

$$\left.\begin{matrix} ia = -b \\ ib = a \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} -ic = -d \\ -id = c \end{matrix}\right\}, \tag{132}$$

$b = -ia$, $d = ic$. Положив $a = 1$, $c = 1$, получим $b = -i$, $d = i$, так что

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{Vmatrix}. \tag{133}$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{dZ}{dx} = ZB, \quad B = \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}, \tag{134}$$

согласно формуле (103), находим:

$$Z = \begin{Vmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{Vmatrix}. \tag{135}$$

Подставляя Z в формулу $Y = ZS$, получим:

$$Y = \begin{Vmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} e^{ix} & -ie^{ix} \\ e^{-ix} & ie^{-ix} \end{Vmatrix}. \tag{136}$$

Заменим комплексные решения вещественными. Отделяя в решении

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad -ie^{ix} = -i(\cos x + i \sin x) \tag{137}$$

вещественные и мнимые части, получим искомые вещественные решения:

$$\left.\begin{matrix} \cos x, & \sin x, \\ \sin x, & -\cos x, \end{matrix}\right\} \tag{138}$$

которые образуют фундаментальную систему решений.

Общим решением системы (125) будет

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 &= C_1 \sin x - C_2 \cos x. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

22. Структура фундаментальной системы решений однородной линейной системы с постоянными коэффициентами, установленная в п. **19—20,** дает возможность определить вид семейства решений, соответствующих данному характеристическому числу. Для этого нужно взять линейные комбинации всех линейно независимых частных решений, соответствующих данному характеристическому числу с произвольными постоянными коэффициентами. В результате получим, что простому характеристическому числу λ_1 соответствует семейство решений вида

$$y_1 = Cs_{11}e^{\lambda_1 x},\ y_2 = Cs_{12}e^{\lambda_1 x},\ \dots,\ y_n = Cs_{1n}e^{\lambda_1 x}. \tag{140}$$

Если же λ_1 — характеристическое число кратности k, то ему соответствует семейство решений вида

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x},\ y_2 = P_2(x)e^{\lambda_1 x},\ \dots,\ y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x}, \tag{141}$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ — полиномы степени не выше $k-1$,* коэффициенты которых являются линейными функциями от k произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_k, так что среди всех коэффициентов всех полиномов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ произвольными являются k коэффициентов, а остальные выражаются через них (ср. п. **13**).

Полиномы $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ достигают наивысшей степени $k-1$, когда характеристическому числу λ_1 соответствует один непростой элементарный делитель $(\lambda-\lambda_1)^k$, и обращаются в постоянные числа, когда все элементарные делители простые:

$$\lambda-\lambda_1,\ \lambda-\lambda_1,\ \dots,\ \lambda-\lambda_1$$

(k элементарных делителей) (почему?).

23. Пусть дана система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} y_l \quad (k = 1, 2, \dots, n). \tag{142}$$

Запишем ее в матричном виде

$$\frac{dY}{dx} = YA. \tag{143}$$

* Эта степень равна наивысшей из степеней элементарных делителей, соответствующих характеристическому числу λ_1.

Приведем A к каноническому виду $B = SAS^{-1}$. Сделаем подстановку

$$Y = ZS. \tag{144}$$

Получим

$$\frac{dZ}{dx} = ZB. \tag{145}$$

Уравнение (145) называется *каноническим* матричным уравнением, а соответствующая ему однородная линейная система — *каноническим видом* данной системы (142).

Для выяснения структуры канонической системы запишем ее в векторной форме

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = B^*\bar{z}. \tag{146}$$

[Мы заменили B на B^*, так как при переходе от обычной (и векторной) записи системы к матричной записи вида (143) матрица коэффициентов системы транспонируется.]

Если матрица A имеет чисто диагональный канонический вид

$$B = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n], \tag{147}$$

то

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\,\bar{z}, \tag{148}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1, \\ \frac{dz_2}{dx} &= \lambda_2 z_2, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dz_n}{dx} &= \lambda_n z_n. \end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Таким образом, если элементарные делители матрицы A простые, то независимо от того, будут сами характеристические числа простыми или кратными, система (142) приводится к *чисто диагональному виду* (149).

При этом, если среди характеристических чисел имеются комплексные, то и соответствующие уравнения в канонической системе (149) окажутся комплексными. Их можно заменить вещественными. В самом деле, пусть $\lambda_1 = p + iq$. Тогда $p - iq$ тоже будет характеристическим числом. Пусть $p - iq = \lambda_2$. Заменим пару комплексных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= \lambda_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} &= \lambda_2 y_2 \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

соответствующей парой вещественных уравнений. Введем вместо y_1 и y_2 новые неизвестные функции u и v, положив

$$y_1 = u + iv, \quad y_2 = u - iv, \tag{151}$$

где u и v — вещественные функции от x. Подставляя $y_1 = u + iv$ в первое из уравнений (150), имеем:

$$\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = (p + iq)(u + iv), \tag{152}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= pu - qv, \\ \frac{dv}{dx} &= pv + qu. \end{aligned}\right\} \tag{153}$$

Эта пара вещественных уравнений и заменяет пару (150).

В случае, когда канонический вид матрицы A квазидиагональный:

$$B = \left[I_{\rho_1}(\lambda_1),\ I_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I_{\rho_s}(\lambda_s)\right], \tag{154}$$

система (146) запишется так:

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = \left[I^*_{\rho_1}(\lambda_1),\ I^*_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ I^*_{\rho_s}(\lambda_s)\right]\bar{z}, \tag{155}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + z_2, \\ \frac{dz_2}{dx} &= \lambda_1 z_2 + z_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_{\rho_1-1}}{dx} &= \lambda_1 z_{\rho_1-1} + z_{\rho_1}, \\ \frac{dz_{\rho_1}}{dx} &= \lambda_1 z_{\rho_1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_{n-\rho_s+1}}{dx} &= \lambda_s z_{n-\rho_s+1} + z_{n-\rho_s+2}, \\ \frac{dz_{n-\rho_s+2}}{dx} &= \lambda_s z_{n-\rho_s+2} + z_{n-\rho_s+3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dz_{n-1}}{dx} &= \lambda_s z_{n-1} + z_n, \\ \frac{dz_n}{dx} &= \lambda_s z_n. \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Такой вид канонической системы называется *квазидиагональным*. Система (156) состоит из s групп. Каждому элементарному делителю соответствует своя группа, причем число уравнений в каждой группе равно степени элементарного делителя.

Проинтегрировав системы уравнений, образующих каждую группу (эти системы интегрируются последовательно, причем каждый раз дело сводится к интегрированию линейного уравнения), получим общее решение всей системы (156). Так как любая система (142) приводится к каноническому виду, то тем самым вновь доказывается, что система (142) всегда может быть проинтегрирована в элементарных функциях.

Возможность приведения любой системы (142) к каноническому виду есть основной результат теории линейных систем с постоянными коэффициентами, ибо дает право при изучении многих вопросов общей теории дифференциальных уравнений, приводящихся к изучению линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, ограничиться рассмотрением систем канонического вида, что, значительно облегчая исследование, не умаляет общности полученных результатов.

Пример. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_2 + y_3. \end{aligned}\right\} \tag{157}$$

Здесь одно характеристическое число $\lambda_1 = 0$ простое, а другое двукратное: $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ с непростым элементарным делителем $(\lambda - 1)^2$ (почему?). Поэтому

$$B = [I_1(0),\ I_2(1)] \tag{158}$$

и система (157) приводится к квазидиагональному каноническому виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx} &= 0, \\ \frac{dz_2}{dx} &= z_2 + z_3, \\ \frac{dz_3}{dx} &= z_3. \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

24. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_k}{dt} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{160}$$

Она определяет (в числе других) нулевое решение

$$x_1 \equiv 0, \ x_2 \equiv 0, \ \ldots, \ x_n \equiv 0. \tag{161}$$

Из вида фундаментальной системы решений и общего решения следует, что:

1) для того чтобы решение (161) было асимптотически устойчивым, в смысле Ляпунова при $t \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы все характеристические числа имели отрицательную вещественную часть (почему?);

2) если хоть одно из характеристических чисел имеет положительную вещественную часть, то решение (161) неустойчиво (почему?);

3) если среди характеристических чисел нет таких, которые имеют положительные вещественные части, но имеются характеристические числа, вещественные части которых равны нулю, то решение (161) устойчиво (неасимптотически), когда все элементарные делители, им соответствующие, простые, и неустойчиво, если хотя бы один из этих элементарных делителей непростой (почему?).

25. Об устойчивости решений нелинейных систем иногда можно судить на основании рассмотрения соответствующих линейных систем.

Пусть дана нелинейная автономная система

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l + f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{162}$$

где a_{kl} — постоянные вещественные числа, а f_k — ряды по степеням $x_1, x_2, \ldots, x_n$, начинающиеся с членов не ниже второго измерения

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_n \geqslant 2}^{\infty} a^{(k)}_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{163}$$

сходящиеся в области

$$|x_1| < r, \ |x_2| < r, \ \ldots, \ |x_n| < r. \tag{164}$$

Если в правых частях системы отбросить все нелинейные члены f_k, то получим линейную систему (160)

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

которая называется *системой первого приближения для системы* (162).

Теорема *Ляпунова.* 1) *Если все характеристические числа системы первого приближения* (160) *имеют отрицательные вещественные части, то решение* (161) *системы* (162) *устойчиво и притом асимптотически, каковы бы ни были члены высших порядков в уравнениях системы* (162).

2) *Если хоть одно из характеристических чисел системы первого приближения имеет положительную вещественную часть, то решение* (161) *системы* (162) *неустойчиво при любом выборе* f_k.

3) *Если среди характеристических чисел системы первого приближения нет таких, которые имеют положительные вещественные части, но имеются характеристические числа, вещественные части которых равны нулю, то решение* (161) *системы* (162) *в зависимости от выбора* f_k *может оказаться как устойчивым, так и неустойчивым.**

В первых двух случаях вопрос об устойчивости нулевого решения системы (162) полностью решается рассмотрением вопроса об устойчивости этого решения для системы первого приближения: если для системы (160) решение (161) асимптотически устойчиво (неустойчиво), то оно будет асимптотически устойчиво (неустойчиво) и для системы (162). В третьем случае при исследовании вопроса об устойчивости системы (162) приходится принимать во внимание и члены более высокого порядка, входящие в правые части этой системы.

§ 6. ЗАДАЧИ

Матвеев. Сборник задач, №№ **920, 922, 924, 927, 935, 936, 938, 940, 942, 944, 946, 948, 950, 951, 954, 958, 970, 972, 975, 977, 978, 980, 983, 985, 987, 991, 1012, 1015, 1018, 1024, 1027, 1028, 1030, 1031, 1033.**

---

* См. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1952, стр. 66–69.

ГЛАВА VIII

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Понятие о линейном уравнении с частными производными первого порядка **2.** Связь между однородным линейным уравнением с частными производными первого порядка и соответствующей ему системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме. **3.** Построение общего решения однородного уравнения. **4.** Решение задачи Коши.

§ 2. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

5. Построение общего решения. **6.** Решение задачи Коши.

§ 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7. Система двух нелинейных уравнений, разрешенных относительно частных производных. Условие совместности. **8.** Уравнение Пфаффа. **9.** Метод Лагранжа — Шарпи нахождения полного интеграла нелинейного уравнения.

§ 4. ЗАДАЧИ

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Матвеев. Методы интегрирования, гл. XII, пп. **231—235.**
Степанов, гл. VIII, §§ 1—3; гл. IX, §§ 1—4.
Эльсгольц, гл. VI, §§ 1—4.

Дополнительная

Петровский, Дополнение, §§ 53—57.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§ 1. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

1. Во введении было дано понятие об уравнении с частными производными первого порядка, его решении и о задаче Коши (в случае двух независимых переменных). В этой главе изучаются линейные уравнения общего вида и дается понятие о некоторых методах интегрирования нелинейных уравнений.

Если в уравнение с частными производными первого порядка

$$\Phi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \tag{1}$$

где $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — искомая функция от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а Φ — известная функция своих аргументов, частные производные от искомой функции входят линейно, то такое уравнение называется *линейным*. Следовательно, линейное уравнение может быть записано так:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+$$
$$+X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \tag{2}$$

В случае, когда правая часть R тождественно равна нулю, а коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не зависят от переменной u (т. е. от искомой функции), линейное уравнение (2) принимает вид

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+$$
$$+X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{3}$$

и называется *однородным*. В противном случае оно называется *неоднородным*. Так, уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{4}$$

где z — неизвестная функция от x и y, однородное, а уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z \tag{5}$$

и

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+zy\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{6}$$

неоднородные.

Рассмотрим однородное уравнение (3). Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными по всем аргументам в некоторой окрестности начальной точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и не обращаются в этой точке одновременно в нуль. Пусть, например,

$$X_n\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \neq 0. \tag{7}$$

Мы будем рассматривать вопрос о нахождении решений уравнения (3), определенных в некоторой окрестности указанной точки, т. е. мы будем искать функции определенные и непрерывно дифференцируемые в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, которые обращают уравнение (3) в тождество.

Заметим прежде всего, что однородное уравнение (3) всегда имеет решение вида

$$u = c, \tag{8}$$

где $c = \text{const}$. Такие решения будем называть *очевидными*. Покажем, что при сделанных предположениях относительно коэффициентов уравнения (3) оно имеет бесчисленное множество неочевидных решений.

2. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{9}$$

знаменатели которой суть коэффициенты уравнения (3). Эта система называется *системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме, соответствующей однородному линейному уравнению с частными производными* (3).

Теорема 1. *Если функция* $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *есть непрерывно дифференцируемый интеграл системы* (9), *то* $u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *является решением уравнения* (3).

2. *Если* $u = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv \text{const}$ — *решение уравнения* (3), *то* $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — *интеграл системы* (9).

В самом деле, первое утверждение следует из определения интеграла системы дифференциальных уравнений в симметрической форме, данного на стр. 148.

Справедливость второго утверждения также почти очевидна. В самом деле, нужно доказать, что полный дифференциал функции $u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тождественно равен нулю в силу системы (9), т. е.

$$du_1\big|_{(9)} = \frac{du_1}{dx_1}X_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n}X_n \equiv 0. \tag{10}$$

Но это следует из того, что $u = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть решение уравнения (3).

Из установленной теоремы вытекает, что задачи интегрирования уравнения (3) и системы (9) равносильны.

3. При сделанных предположениях система (9) имеет ровно $n-1$ независимых интегралов

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{11}$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности начальной точки $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, так как при этих предположениях система (9) равносильна нормальной системе $n-1$ уравнений

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n},\ \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n},\ \ldots,\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}, \tag{12}$$

правые части которых определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$, а тогда система (12) имеет ровно $n-1$ независимых интегралов, непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности этой точки (см. гл. V, п. **12**). Любая непрерывно дифференцируемая функция от интегралов (11)

$$u=F\left(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}\right) \tag{13}$$

также будет интегралом системы (9) (почему?) и, следовательно, решением уравнения (3). Решение (13), где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от своих аргументов, будем называть *общим решением уравнения* (3).

Рассмотрим случай двух независимых переменных. В этом случае уравнение (3) обычно записывают в виде

$$P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{14}$$

где z — неизвестная функция от x и y, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — заданные функции от x и y.

Каждому решению уравнения (14) соответствует в пространстве (x, y, z) некоторая поверхность — *интегральная поверхность* уравнения (3) (см. введение, стр. 9).

В рассматриваемом случае система (9) вырождается в одно уравнение:

$$\frac{dx}{P(x, y)}=\frac{dy}{Q(x, y)}. \tag{15}$$

Пусть $\psi(x, y)$ — интеграл этого уравнения. Тогда общим решением уравнения (14) будет

$$z=F[\psi(x, y)], \tag{16}$$

где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Геометрически общему решению (16) соответствует семейство интегральных поверхностей, зависящее от произвольной функции F.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{17}$$

Соответствующая ему система дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \tag{18}$$

имеет два независимых интеграла:

$$\psi_1=\frac{y}{x}, \quad \psi_2=\frac{z}{x} \tag{19}$$

(см. гл. IV, п. 14). Поэтому общим решением уравнения (17) будет

$$u=F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right). \tag{20}$$

Пример 2. Для уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y} \tag{21}$$

имеем:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dy}{-1}, \quad x+y=C, \quad \psi=x+y,\\ z=F(x+y).\end{array}\right\} \tag{22}$$

4. Задача Коши для уравнения с частными производными первого порядка (1) состоит в нахождении решения

$$u=u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{23}$$

которое при фиксированном значении одной из независимых переменных, например x_n, обращается в заданную непрерывно дифференцируемую функцию от остальных переменных, т. е.

$$u=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n=x_n^{(0)}. \tag{24}$$

Условия (24) называются *начальными условиями* решения (23).

В случае двух независимых переменных, т. е. для уравнения

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \tag{25}$$

задача Коши состоит в нахождении решения

$$z=z(x, y), \tag{26}$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$z=\varphi(y) \quad \text{при} \quad x=x_0, \tag{27}$$

т. е. ищется интегральная поверхность (26), которая проходит через заданную кривую $z=\varphi(y)$, $x=x_0$, лежащую в плоскости $x=x_0$ (см. введение, стр. 10).

При постановке задачи Коши для однородного линейного уравнения (3) для того, чтобы было обеспечено существование решения, фиксируют значение той независимой переменной, для которой коэффициент при соответствующей частной производной от искомой функции отличен от нуля в начальной точке $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$. В нашем случае, в силу условия (7), нужно фиксировать x_n.

Итак, будем искать решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (24).

Для этого воспользуемся независимыми интегралами (11) системы (9). Положим в них $x_n = x_n^{(0)}$ и обозначим полученные функции через $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n$:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}\right) = \overline{\psi}_1, \\ &\psi_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}\right) = \overline{\psi}_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\psi_{n-1}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}\right) = \overline{\psi}_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Система (28) разрешима относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ в некоторой окрестности начальной точки $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ (почему?). Найдем:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = \omega_1\left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}\right), \\ &x_2 = \omega_2\left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_{n-1} = \omega_{n-1}\left(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Построим функцию

$$u = \varphi\left[\omega_1\left(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}\right), \omega_2\left(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}\right), \ldots, \right. \\ \left. \omega_{n-1}\left(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}\right)\right]. \tag{30}$$

Эта функция и является искомым решением поставленной задачи Коши (3)—(24) (почему?).

В случае двух независимых переменных имеем:

$$\left.\begin{aligned} &P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ &z = \varphi(y) \text{ при } x = x_0; \\ &\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \quad \psi = (x, y); \\ &\psi(x_0, y) = \overline{\psi}, \quad y = \omega(\overline{\psi}); \\ &z = \varphi\{\omega[\psi(x, y)]\}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение (17),

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

и поставим начальные условия

$$u=y+z \quad \text{при } x=2. \tag{32}$$

Здесь $X_1(x, y, z)=x$. Имеем: $X_1(2, y_0, z_0)\neq 0$ (какие бы значения y_0, z_0 ни взять), так что существование решения задачи Коши (17)—(32) обеспечено.

Полагая в интегралах (19) системы (18) $x=2$, имеем:

$$\frac{y}{2}=\overline{\psi}_1,\quad \frac{z}{2}=\overline{\psi}_2, \tag{33}$$

откуда

$$y=2\overline{\psi}_1,\quad z=2\overline{\psi}_2. \tag{34}$$

Искомым решением будет

$$u=2\psi_1+2\psi_2 \quad \text{или } u=\frac{2(y+z)}{x}. \tag{35}$$

Пример 2. Найти интегральную поверхность уравнения

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0, \tag{36}$$

проходящую через кривую

$$z=y^2 \quad \text{при } x=0. \tag{37}$$

В начальных условиях (37) фиксировано значение x. Коэффициент при $\frac{\partial z}{\partial x}$ в уравнении (36) будет отличен от нуля в любой точке $(0, y_0)$, где $y_0\neq 0$. Такую точку и возьмем за начальную. В окрестности такой точки решение задачи Коши (36)—(37) обеспечено.

Соответствующее уравнение в симметрической форме

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x} \tag{38}$$

имеет интеграл

$$\psi=x^2+y^2. \tag{39}$$

Полагая в нем $x=0$, имеем:

$$y^2=\overline{\psi}, \tag{40}$$

откуда

$$y=\pm\sqrt{\overline{\psi}}.$$

Искомым решением будет

$$z=\psi(x, y) \quad \text{или } z=x^2+y^2 \tag{41}$$

(ср. введение, стр. 12).

§ 2. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

5. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+$$
$$+X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u). \tag{1}$$

Предположим, что коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и правая часть R определены и непрерывны вместе с частными производными в некоторой окрестности начальной точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$, причем

$$X_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)}) \neq 0. \qquad (2)$$

Будем искать решение уравнения (1) в неявном виде

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0, \qquad (3)$$

где V — некоторая непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, причем

$$\frac{\partial V\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)}\right)}{\partial u} \neq 0. \qquad (4)$$

Продифференцируем соотношение (3) по x_k, считая u функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определяемой (согласно теореме о неявной функции) уравнением (4). Находим:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (5)$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (1), умножая на $\frac{\partial V}{\partial u}$ и перенося все члены в левую часть, получим:

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + R\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) есть однородное линейное уравнение с искомой функцией V. Соответствующая ему система в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R} \qquad (8)$$

имеет n независимых интегралов

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \qquad (9)$$

(почему?). Поэтому

$$V = F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) \qquad (10)$$

будет общим решением уравнения (7).

Подставляя (10) в (3), получим искомое решение уравнения (1) в виде

$$F(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = 0. \qquad (11)$$

Это соотношение, где F — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, будем называть *общим решением* уравнения (1). Если удастся фактически разрешить (в элементарных функциях) уравнение (11) относительно u, то получим общее решение в явном виде:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{12}$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

В случае двух переменных имеем уравнение:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \tag{13}$$

где $z = z(x, y)$. Система (8) принимает вид

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{14}$$

Если $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$ — независимые интегралы этой системы, то общее решение уравнения (13) имеет вид

$$F(\psi_1, \psi_2) = 0. \tag{15}$$

6. Задача Коши для неоднородного линейного уравнения (1) состоит в нахождении решения

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{16}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_n^{(0)}, \tag{17}$$

где φ — заданная непрерывно дифференцируемая функция.

Для решения задачи Коши (1)—(17) воспользуемся независимыми интегралами (9) системы (8). Полагая в них $x_n = x_n^{(0)}$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi}_1, \\ &\psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi}_n. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Разрешая эту систему относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$, находим:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ &x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ &u = \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, \ldots, \overline{\psi}_n). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Подставляя эти значения $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$ в равенство $u=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ и заменяя $\bar{\psi}$ на ψ, получим:

$$\omega(\psi_1, \ldots, \psi_n)=\varphi[\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_n), \omega_2(\psi_1, \ldots, \psi_n), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_n)]. \tag{20}$$

Это уравнение и определяет искомое решение (в неявном виде) (почему?).

В случае двух независимых переменных имеем:

$$\left.\begin{aligned} &P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z),\\ &z=\varphi(y) \text{ при } x=x_0;\\ &\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}, \quad \psi_1(x, y, z), \ \psi_2(x, y, z);\\ &\left.\begin{aligned}\psi_1(x_0, y, z)=\bar{\psi}_1,\\ \psi_2(x_0, y, z)=\bar{\psi}_2,\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y=\omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2),\\ z=\omega(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2);\end{aligned}\\ &\omega(\psi_1, \psi_2)=\varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2)]. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

§ 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7. Рассмотрим нелинейное уравнение с частными производными первого порядка в случае двух независимых переменных

$$F(x, y, z, p, q)=0, \tag{1}$$

где z — искомая функция от x и y, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, а F — заданная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$, зависящая от p и q нелинейно.

Оказывается, что задача интегрирования одного уравнения вида (1) является более трудной, чем интегрирование системы двух *совместных* уравнений такого вида, т. е. имеющих решение общее для обоих уравнений системы.

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q)=0,\\ \Phi(x, y, z, p, q)=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Предположим, что, разрешая ее относительно p и q, получим:

$$\left.\begin{aligned} p=A(x, y, z),\\ q=B(x, y, z),\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где A и B — непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0, z_0).

Найдем необходимое условие совместности системы (3). Предположим, что существует функция $z=z(x, y)$, удовлетворяющая каждому из уравнений этой системы и имеющая непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0). Дифференцируя уравнения (3) соответственно по y и по x, считая $z=z(x, y)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \quad [z=z(x, y)] \tag{5}$$

(почему?). Условие (5) и есть необходимое условие совместности системы (3).

Для того чтобы система (3) *не только была совместна, но и существовало* *с е м е й с т в о* *решений, зависящее хотя бы от одной произвольной постоянной, необходимо, чтобы условие*

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z} B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z} A \tag{6}$$

выполнялось тождественно относительно x, y, z в рассматриваемой области.

Можно доказать, что *тождественное выполнение условия* (6) *является и достаточным для существования такого семейства решений* (см.: С т е п а н о в, стр. 357—359).

Если условие (6) выполняется тождественно относительно x, y, z, то оно называется *условием полной интегрируемости системы* (3).

Пример. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2y. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Проверяя выполнение условия совместности (6), имеем:

$$4xy + 2x(-2y) = 0 + 0\cdot(2x^2 + 2xz + 2xy^2 - 1). \tag{8}$$

Это условие выполняется тождественно относительно x, y и z. Поэтому система (7) вполне интегрируема. (Она имеет семейство решений, зависящее от одной произвольной постоянной.)

Первое из уравнений (7), если в нем фиксировать y, есть **линейное** уравнение относительно z. Интегрируя его, находим:

$$z = e^{x^2}\left[C(y) + \int (2x^2 + 2xy^2 - 1)\, e^{-x^2} dx\right], \tag{9}$$

где $C(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от y. Так как

$$\int (2x^2 + 2xy^2 - 1)\, e^{-x^2} dx = -y^2 e^{-x^2} + \int 2x^2 e^{-x^2} dx - \int e^{-x^2} dx =$$
$$= -y^2 e^{-x^2} - x e^{-x^2} + \int e^{-x^2} dx - \int e^{-x^2} dx = -(y^2 + x)\, e^{-x^2}, \tag{10}$$

то (9) перепишется в виде

$$z = C(y)\, e^{x^2} - y^2 - x. \tag{11}$$

Выберем $C(y)$ так, чтобы функция (11) удовлетворяла и второму из уравнений (7). Дифференцируя (11) по y, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C'(y)\, e^{x^2} - 2y. \tag{12}$$

Поэтому $C(y)$ нужно определять из условия

$$C'(y)\, e^{x^2} - 2y = -2y, \tag{13}$$

откуда

$$C'(y) = 0, \quad C(y) = C. \tag{14}$$

Следовательно,

$$z = Ce^{x^2} - y^2 - x. \tag{15}$$

8. *Уравнением Пфаффа* называется уравнение вида

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, y)\, dz = 0. \tag{16}$$

В это уравнение все переменные x, y, z входят симметрично, и любую из них можно принять за искомую функцию. Предположим, что коэффициенты P, Q и R определены и непрерывны вместе с частными производными в окрестности начальной точки (x_0, y_0, z_0) и не обращаются в этой точке одновременно в нуль. Например, будем считать, что

$$R(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \tag{17}$$

Тогда уравнение (16) можно переписать в виде

$$dz = -\frac{P}{R}\, dx - \frac{Q}{R}\, dy. \tag{18}$$

Найдем условие, при котором уравнение Пфаффа имеет семейство решений (интегральных поверхностей), зависящее от одной произвольной постоянной. Так как на всякой интегральной поверхности $z = z(x, y)$ должно выполняться *основное соотношение*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \tag{19}$$

(аналогичное основному соотношению $dy = y'dx$ в случае интегральной кривой обыкновенного уравнения первого порядка), то для интегральных поверхностей имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy, \tag{20}$$

откуда вследствие независимости dx и dy получаем, что искомые интегральные поверхности должны удовлетворять системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{P}{R}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{Q}{R} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

(почему?). Уравнение Пфаффа (16) равносильно системе (21). Дело сводится, таким образом, к нахождению условия полной интегрируемости системы (21).

Для системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A(x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= B(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

условие полной интегрируемости имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}B = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial z}A, \tag{23}$$

причем оно должно выполняться тождественно в рассматриваемой области. Записывая условие (23) для системы (21), имеем:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial y} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{R}{Q}\right) = \\ &= -\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x} + \left(-\frac{1}{R}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{Q}{R^2}\frac{\partial R}{\partial z}\right)\left(-\frac{P}{R}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Умножим обе части на R^2 и соберем члены при P, Q и R:

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{25}$$

Для удобства запоминания условие (25) можно записать в виде следующего мнемонического равенства:

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Если условие (25) выполняется тождественно, то оно называется *условием полной интегрируемости* уравнения Пфаффа. При выполнении условия (25) интегрирование уравнения Пфаффа приводится к интегрированию системы (21). При этом существует семейство решений, содержащее одну произвольную постоянную.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$(2x^2+2xz+2xy^2-1)\,dx-2y\,dy-dz=0. \tag{27}$$

Проверяя выполнение условия полной интегрируемости (25), имеем:

$$(2x^2+2xz+2xy^2-1)\cdot(0-0)+(-2y)(2x-0)+(-1)(0-4xy)\equiv 0.$$

Следовательно, уравнение (27) допускает семейство интегральных поверхностей, зависящее от одной произвольной постоянной. Принимая z за искомую функцию, заменим уравнение (27) системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=2x^2+2xz+2xy^2-1,\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-2y. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Эта система, а следовательно и уравнение (27), имеет семейство решений:

$$z=Ce^{x^2}-y^2-x \tag{29}$$

(см. п. 7).

9. Рассмотрим нелинейное уравнение общего вида

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0. \tag{30}$$

Соотношение вида

$$V(x,\ y,\ z,\ a\ b)=0 \quad \text{или} \quad z=\varphi(x,\ y,\ a,\ b), \tag{31}$$

где a и b — произвольные постоянные, а z — решение уравнения (30), называется *полным интегралом* уравнения (30). Уравнение (30) эквивалентно уравнению, получаемому исключением a и b из системы

$$\left.\begin{aligned} &V(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0,\\ &\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}p=0,\\ &\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}q=0 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

или

$$\left.\begin{aligned} z&=\varphi(x,\ y,\ a,\ b),\\ p&=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ q&=\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Пример 1. Уравнение

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2 \quad (R=\text{const}) \tag{34}$$

имеет полный интеграл вида

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2. \tag{35}$$

Пример 2. Для уравнения

$$z=px+qy+pq \tag{36}$$

полным интегралом будет

$$z=ax+by+ab. \tag{37}$$

Рассмотрим метод *Лагранжа — Шарпи* нахождения полного интеграла уравнения (30). Основная идея этого метода состоит в том, что для уравнения (30) находится такое другое уравнение

$$\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a, \tag{38}$$

где a — произвольная постоянная, чтобы система

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)&=0,\\ \Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)&=a \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

была разрешима относительно p и q и чтобы полученная в результате этого разрешения система

$$\left.\begin{aligned} p&=A(x,\ y,\ z,\ a),\\ q&=B(x,\ y,\ z,\ a) \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

была вполне интегрируема. Задача состоит в том, чтобы по заданной функции F найти надлежащим образом функцию Φ.

Предположим, что F и Φ непрерывны вместе с частными производными в окрестности начальной точки $(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)$, в которой

$$\left.\begin{aligned} F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)&=0,\\ \Phi(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)&=a \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

и якобиан

$$\frac{D(F,\ \Phi)}{D(p,\ q)}\neq 0. \tag{42}$$

Тогда система (39) разрешима относительно p и q в окрестности этой точки, т. е. определяет функции (40), где

$$\left.\begin{aligned} A(x_0,\ y_0,\ z_0,\ a)&=p_0,\\ B(x_0,\ y_0,\ z_0,\ a)&=q_0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Условие полной интегрируемости для системы (40) запишется так:

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial z}q=\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial z}p, \tag{44}$$

где $p=A(x, y, z, a)$, $q=B(x, y, z, a)$. Заменим в нем частные производные от p и q их значениями, которые можно найти из системы (39) при помощи неявного дифференцирования.

Дифференцируя равенства (39) относительно z, считая в них p и q функциями от x, y, z, определяемыми формулами (40), имеем:

$$\left.\begin{aligned} F'_z+F'_p\frac{\partial p}{\partial z}+F'_q\frac{\partial q}{\partial z}=0, \\ \Phi'_z+\Phi'_p\frac{\partial p}{\partial z}+\Phi'_q\frac{\partial q}{\partial z}=0, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_z & F'_q \\ \Phi'_z & \Phi'_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial z}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_p & F'_z \\ \Phi'_p & \Phi'_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}. \tag{46}$$

Аналогично дифференцируя равенства (39) сначала по x, потом по y, получим две системы уравнений, из которых найдем:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_p & F'_x \\ \Phi'_p & \Phi'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} F'_y & F'_q \\ \Phi'_y & \Phi'_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}. \tag{47}$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial p}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial z}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$ в условие (44) и освобождаясь от знаменателя, получим:

$$\begin{vmatrix} F'_p & F'_x+F'_zp \\ \Phi'_p & \Phi'_x+\Phi'_zp \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} F'_q & F'_y+F'_zq \\ \Phi'_q & \Phi'_y+\Phi'_zq \end{vmatrix}=0. \tag{48}$$

Это условие должно выполняться тождественно относительно x, y, z.

Из условия (48) следует, что функция Φ должна удовлетворять однородному **линейному** уравнению с частными производными первого порядка

$$F'_p\frac{\partial\Phi}{\partial x}+F'_q\frac{\partial\Phi}{\partial y}+(F'_pp+F'_qq)\frac{\partial\Phi}{\partial z}-$$
$$-(F'_x+F'_zp)\frac{\partial\Phi}{\partial p}-(F'_y+F'_zq)\frac{\partial\Phi}{\partial q}=0. \tag{49}$$

Введя для кратности обозначения

$$F'_x = X,\ F'_y = Y,\ F'_z = Z,\ F'_p = P,\ F'_q = Q \qquad (50)$$

(X, Y, Z, P и Q — известные функции от x, y, z, p и q коль скоро функция F известна), перепишем уравнение (49) в виде

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial y} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y}(Pp + Qq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \\ -(X + Zp)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + Zq)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0. \qquad (51)$$

Составляем соответствующую этому уравнению систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + Zp)} = \frac{dq}{-(Y + Zq)}. \qquad (52)$$

Нам нужно найти только один первый интеграл этой системы вида $\Phi = a$, где a — произвольная постоянная, причем функция Φ должна удовлетворять поставленным выше условиям.

На практике нужно сразу составить систему (52), найти ее первый интеграл, построить систему (39), перейти к системе (40) и проинтегрировать последнюю, в результате чего появится новая произвольная постоянная b, и мы получим полный интеграл данного уравнения **(30)**.

Пример 3. Рассмотрим уравнение (36),

$$z = px + qy + pq.$$

Здесь $X = -p$, $Y = -q$, $Z = 1$, $P = -x - q$, $Q = -y - p$. Поэтому, составляя систему (52), имеем:

$$\frac{dx}{-x - q} = \frac{dy}{-y - p} = \frac{dz}{-px - qy - 2pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}. \qquad (53)$$

Очевидно,

$$p = a \qquad (54)$$

будет первым интегралом этой системы, причем система (39) примет вид

$$\left.\begin{aligned} z &= xp + yq + pq, \\ p &= a \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

и будет разрешима относительно p и q. Получим:

$$\left.\begin{aligned} p &= a, \\ q &= \frac{z - ax}{y + a}. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Эта система вполне интегрируема (почему?). Интегрируя ее, найдем полный интеграл уравнения (36) в виде (37).

§ 4. ЗАДАЧИ

Матвеев. Сборник задач, №№ **1064—1068, 1072, 1073, 1075, 1077—1080.**

Доказать, что система

45. $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2yz^2 \end{cases}$$

удовлетворяет условию полной интегрируемости, и найти семейство решений, зависящее от одной произвольной постоянной.

Доказать, что уравнение

46. $$(x^2 + 2z - y^2)\,dx + x^3 dy - x\,dz = 0$$

вполне интегрируемо, и найти семейство решений, зависящее от одной произвольной постоянной.

Найти методом Лагранжа—Шарпи полный интеграл уравнения

47. $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

К главе I

1. $\frac{2}{y}dx+\frac{1}{xy}dy=0, \quad \mu_1=xy, \quad U_1=x^2+y;$

$$\frac{y}{x^3}dx-\frac{2}{x^2}dy=0, \quad \mu_2=\frac{x^2}{y}, \quad U_2=\frac{x}{y^2}; \quad \mu=xy.$$

$$x^2+y-\frac{y^2}{x}=C.$$

2. Если $a\beta-b\alpha\neq 0$, то $\frac{(x^b\cdot y^a)^k}{k}+\frac{(x^\beta y^\alpha)^l}{l}=C$, где k и l находятся из системы $ak-\alpha l=-n^k$, $bk-\beta l=-m$; если $a\beta-b\alpha=0$, то $x^by^a=C$. [Указание. Если $a\beta-b\alpha\neq 0$, то имеем: $axdy+bydx=0$, $\mu_1=\frac{1}{xy}$, $U_1=x^by^a$, $x^my^n(axdy+$

$$+\beta ydx)=0, \quad \mu_2=\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}, \quad U_2=x^\beta y^\alpha; \quad \mu=\frac{1}{xy}\varphi(x^by^a)=$$

$$=\frac{1}{x^{m+1}\,y^{n+1}}\psi(x^\beta y^\alpha);\ \text{возьмем}\ \varphi(U_1)=U_1^k,\ \psi(U_2)=U_2^l:$$

$\mu=\frac{1}{xy}\ (x^by^a)=\frac{1}{x^{m+1}\,y^{n+1}}(x^\beta y^\alpha)^l$; приравнивая показатели степеней, получим систему для определения k и l. Если $a\beta-b\alpha=0$, то данное уравнение сводится к уравнению $axdy+bydx=0$.]

3. $y=\frac{u}{x}, \quad x^{\frac{2}{3}}=t, \quad u=\frac{t}{-\frac{1}{3}+v}, \quad v=w\sqrt{t},$

$$w=\operatorname{tg}(c-3\sqrt{t}).$$

4. $y=\frac{u}{x}, \quad x^{-\frac{2}{3}}=t, \quad u=1+\frac{t}{v}, \quad v=\frac{1}{3}+\frac{t}{w},$

$$w=z\sqrt{t}, \quad z=\frac{1+Ce^{6\sqrt{t}}}{1-Ce^{6\sqrt{t}}}.$$

К главе V

5. $|x| \leqslant \frac{1}{2}$; $y_2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$.

6. $|x| \leqslant 1$; $y_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{63}$.

7. $|x| \leqslant 1$; $y_2 = 1 + \int\limits_0^x \sin[x(2 - \cos x)]\, dx$.

8. $-\infty < x < 1$; $y_2 = 1 - \ln(1 - x) + \frac{1}{2} \ln^2(1 - x)$.

9. $|x| < +\infty$; $y_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

10. $|x| \leqslant \frac{1}{3}$; $y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $z_2 = x + \frac{x^4}{8}$.

11. $|x| < +\infty$; $y_2 = -2\frac{1}{3} + 5x - \frac{2}{3} x^3$.

12. $y = e^x$; $|x| < +\infty$.

13. $y = \cos x + x$, $z = \sin x$; $|x| < +\infty$.

14. $y = e^{x^2}$; $|x| < +\infty$. **15.** $|x| < 1 - e^{-\frac{1}{4}}$; $y = \frac{2}{3!} x^3$.

16. $|x| < 1$; $y \doteq 1 + x + x^2 + x^3$.

17. $|x| < 1 - e^{-\frac{1}{6}}$; $y \doteq \frac{1}{3} x^3$.

18. $|x| < +\infty$; $y \doteq 2 + 3(x - 1) - 2(x - 1)^2 - \frac{10}{3!}(x - 1)^3$.

19. $|x| < 1 - e^{-\frac{1}{9}}$; $y \doteq \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3$, $z \doteq x$.

20. $|x - 1| < 1$; $y \doteq 2 - (x - 1) + \frac{1}{3!}(x - 1)^3$, $z \doteq -1 -$
$- (x - 1) + \frac{1}{2!}(x - 1)^2$.

21. $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$ $|x| < 1$.

22. $y = x + \frac{4}{3!} x^3 + \frac{4 \cdot 8}{5!} x^5 + \frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{7!} x^7 + \ldots$; $|x| < +\infty$.

23. $y = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x + x$,

$z = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sin x$; $|x| < +\infty$.

24. $y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}=e^{x^2}$; $|x|<+\infty$. **25.** $|x|<+\infty$; $|x|<1$.

26. $|x|<+\infty$; $|x|<1$. **27.** $-\infty<x<2$; $|x|<1$.

28. $0<x<+\infty$; $|x-1|<1$.

29. $-\infty<x<2$ при $x_0<2$, $2<x<+\infty$ при $x_0>2$; $|x-x_0|<|2-x_0|$.

30. $x_0\neq 0$, y_0 — любое; $-\infty<x<0$ при $x_0<0$, $0<x<+\infty$ при $x_0>0$; $|x-x_0|<|x_0|$.

31. $x_0\neq 0$, $x_0\neq 1$, y_0 и y_0' — любые; $-\infty<x<0$ при $x_0<0$, $0<x<1$ при $0<x_0<1$, $1<x<+\infty$ при $x_0>1$; $|x-x_0|<|x_0|$ при $x_0<0$, $|x-x_0|<\min(x_0, 1-x_0)$ при $0<x_0<1$, $|x-x_0|<x_0-1$ при $x_0>1$.

32. x_0, y_0 и y_0' — любые; $|x|<+\infty$; $|x-x_0|<\sqrt{1+x_0^2}$.

33. x_0, y_0, y_0' и y_0'' — любые; $|x|<+\infty$; $|x|<+\infty$.

34. $x_0\neq -1$, $x_0\neq 1$, y_0 и z_0 — любые; $-\infty<x<-1$ при $x_0<-1$, $-1<x<+1$ при $-1<x_0<1$, $1<x<+\infty$ при $x_0>1$; $|x-x_0|<-1-x_0$ при $x_0<-1$, $|x-x_0|<\min(x_0+1, 1-x_0)$ при $-1<x_0<1$, $|x-x_0|<x_0-1$ при $x_0>1$.

35. Узел, $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{2\eta}{\xi}$. **36.** Седло, $\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{\eta}{\xi}$.

37. Фокус, $\frac{dv}{du}=-\frac{u-2v}{2u+v}$. **38.** Центр, $\frac{dv}{du}=-\frac{u}{v}$.

39. Вырожденный узел, $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+3\eta}{3\xi}$.

40. Центр. **41.** Фокус.

К главе VI

42. $x=e^{2t}$. **43.** $x=2t^2e^t$. **44.** $x=-2\sin t$.

К главе VIII

45. $z=-\frac{1}{x+y^2+C}$. **46.** $z=x^2(y+\ln x-x+C)$.

47. $z^2a^2=x+ay+b$.

ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа № 1

1. Для каждого из уравнений

$$y' = \frac{x+y}{x}, \qquad y' = 2\sqrt{|y-1|}$$

определить область задания, области существования и единственности решения задачи Коши; изучить поле направлений, определяемое этим дифференциальным уравнением (найти изоклины, указать области возрастания и убывания решений, найти линии экстремумов, установить направление вогнутости, найти линии точек перегиба); сделать схематический набросок семейства интегральных кривых; проинтегрировать уравнение и изучить поведение интегральных кривых; сделать рисунок.

2. Проинтегрировать уравнение

$$2\left(y - 2xy - x^2\sqrt{y}\right) + x^2 y' = 0$$

и найти решение, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $y=1$ при $x=1$, б) $y=0$ при $x=1$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности его.

3. Найти по аналитическому виду уравнения

$$2\left(ax + \sqrt{y - x^2}\right)dx - dy = 0$$

кривые, подозрительные на особые решения, и проверить, будут ли они особыми решениями?

4. Найти общий интеграл уравнения

$$\left(x + \frac{y^2}{x} + xy\right)dx - \left(\frac{x^2}{y} + y\right)dy = 0.$$

5. В какое время вода, заполняющая полусферическую чашу диаметром 2 *м*, вытекает из нее через круглое отверстие радиуса 0,1 *м*, вырезанное на дне чаши?

Указание. Скорость истечения воды $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, где h — высота столба воды над отверстием.

6. Проинтегрировать уравнение

$$y'^2 - 2y' + 4x - 4y + 1 = 0.$$

7. Найти по аналитическому виду уравнения

$$y'^2 + y^3 - 1 = 0$$

кривые, подозрительные на особые решения, и проверить, будут ли они особыми решениями?

8. Проинтегрировать уравнение

$$y'^3 - y' + x = 0.$$

9. Найти кривую, касательная к которой удалена от начала координат на расстояние a.

10. Найти силовые линии поля, создаваемого силами, имеющими потенциал

$$U = \frac{y}{x^2}$$

(сделать рисунок).

Контрольная работа № 2

1. Проинтегрировать уравнение

$$y'' = \sin x^2.$$

Найти решение удовлетворяющее начальным условиям

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Найти решение уравнения

$$y'' = 12x^2,$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \quad y = 0 \quad \text{при} \quad x = 1$$

(сделать рисунок).

3. Проинтегрировать уравнение

$$y''^2 - xy'' + y' = 0.$$

Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 0, \quad y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

4. Найти интегральную кривую уравнения

$$yy'' - y'^2 - 1 = 0,$$

касающуюся прямой $y=1$ в точке $(0, 1)$, доказав предварительно, что искомая кривая существует и единственна (сделать рисунок).

5. Проинтегрировать уравнение

$$yy'' - y'^2 + yy' \operatorname{tg} x = 0.$$

Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям,

$$y=1, \quad y'=1 \quad \text{при} \quad x=0,$$

исследовав предварительно вопрос о существовании и единственности искомого решения.

6. Проинтегрировать уравнение

$$xy^2y'' + y^2y' - y' = 0.$$

7. Точка массы m движется по оси Ox под действием силы $F(x)$, направленной по оси Ox и зависящей только от положения точки. Найти зависимость t от x, если известно, что

$$x = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 > 0 \text{ при } t = 0.$$

8. Проинтегрировать систему

$$\left.\begin{aligned} y' &= yz, \\ z' &= -z^2 + \frac{1}{x} z. \end{aligned}\right\}$$

Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=1, \quad z=2 \quad \text{при} \quad x=1,$$

исследовав предварительно вопрос о существовании и единственности искомого решения.

9. Найти общий интеграл системы

$$\frac{dx}{x(y^2-z^2)} = \frac{dy}{-y(x^2+z^2)} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}.$$

10. Доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения системы

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2 + z, \quad \frac{dz}{dx} = y + z^2 - 1; \quad |x| \leqslant 2, \quad |y| \leqslant 1, \quad |z| \leqslant 1,$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y=0, \quad z=0 \quad \text{при} \quad x=0,$$

оценить область существования решения и построить второе приближение к искомому решению.

Контрольная работа № 3

1. Проинтегрировать уравнение

$$y'' + y' = 2x - e^{-x} + e^{x} - 2\sin x,$$

найдя частное решение методом неопределенных коэффициентов.

2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 8\cos^2 x - 4x.$$

3. Материальная точка единичной массы движения по оси Ox под влиянием силы $(-5x)$, притягивающей ее к началу координат, силы сопротивления среды $\left(-2\frac{dx}{dt}\right)$ и внешней силы, направленной по оси Ox и равной $e^{-t}\cos 2t$ в момент времени t. Составить дифференциальное уравнение движения этой точки. Найти движение, определяемое полученным уравнением и начальными условиями:

$$x = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

4. Проинтегрировать уравнение

$$y'' - y = 2e^{x}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$$

методом вариации произвольных постоянных.

5. Проинтегрировать уравнение

$$x^2y'' + xy' - y = 8x^3.$$

Найти решения, обладающие свойством:

$$y \to 0, \quad y' \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

6. Проинтегрировать уравнение

$$x'' - x = 2e^{t} + t,$$

найдя предварительно операционным (операторным) методом частное решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = 0, \quad x' = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

7. Найти общее решение уравнения

$$x^3y'' - (x^2 + x)\,y' + 2y = 0,$$

если известно, что оно имеет частное решение в виде полинома.

8. Найти фундаментальную систему решений уравнения

$$y'' - xy' + 3y = 0$$

в виде рядов по степеням x, нормированную в точке $x=0$ (указать область сходимости этих рядов) и построить общее решение.

Контрольная работа № 4

1. Найти общее решение системы

$$\frac{dy}{dx}=2y-z-3x+1,$$
$$\frac{dz}{dx}=4y-2z-6x-1$$

методом исключения. Выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=0,\quad z=-1 \quad \text{при } x=0.$$

2. Проинтегрировать систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-x+y+z,\\ \frac{dy}{dt}&=x-y+z,\\ \frac{dz}{dt}&=x+y-z\end{aligned}\right\}$$

методом интегрируемых комбинаций и методом Эйлера. Исследовать устойчивость нулевого решения (при $t\to+\infty$) по виду характеристических чисел.

3. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=z-y,\\ \frac{dy}{dt}&=x-z,\\ \frac{dz}{dt}&=y-x\end{aligned}\right\}$$

методом Эйлера. Исследовать устойчивость нулевого решения при $t\to+\infty$ по виду характеристических чисел.

4. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x+y-2e^{-t},\\ \frac{dy}{dt}&=-x+y+e^{-t}\end{aligned}\right\}$$

методом вариации произвольных постоянных. Выделить решение, обладающее свойством:

$$x\to 0,\quad y\to 0 \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

5. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= 2y_1 - 9y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + 8y_2 \end{aligned}\right\}$$

матричным методом.

6. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y \end{aligned}\right\}$$

в форме Коши (полагая $t_0 = 0$), траектории движений, определяемых этой системой, указав на рисунке стрелками направление движения при возрастании времени t, и исследовать устойчивость нулевого решения (при $t \to +\infty$), указать тип точки равновесия.

7. Проинтегрировать уравнение

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (x > 0).$$

Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u = y^2 - z \quad \text{при} \quad x = 1.$$

8. Проинтегрировать уравнение

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} + y^2 - x^2 = 0.$$

Найти интегральную поверхность, проходящую через кривую

$$z = x^2, \quad y = 0.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Цифры обозначают страницы)

Автономная система д. у.* 128, 209, 335
Амплитуда колебания 257

Вековой член 259

Гамма-функция 280
Голоморфное решение задачи Коши 211

Дискриминантная кривая 29, 74
Дифференцируемость решения нормальной системы по начальным данным 195

Задача Коши 22, 70, 98, 133, 145, 341, 345

Изогональные траектории 90
Интеграл нормальной системы д. у. 139, 203
— системы д. у. в симметрической форме 148
— уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной 32
Интегральная кривая 9
— матрица 322
— — нормированная 322
— поверхность 9
Интегрирование однородного линейного уравнения второго порядка при помощи обобщенных степенных рядов 277
— — — — — — — — — степенных рядов 275
Интегрируемые комбинации 153
Интегрирующий множитель 45, 59, 62

Каноническая система д. у. 145
Канонический вид однородной линейной системы с постоянными коэффициентами 332
Колебание вынужденное 257, 258
— гармоническое 257
— затухающее 258
Колебание свободное 257
Комплексная функция вещественной переменной 239
Комплексное решение однородного линейного уравнения n-го порядка 239
— — однородной линейной системы д. у. 296
Константа Липшица 158
Краевая (граничная) задача 14, 101

Линейная система 8
Линейно независимые и линейно зависимые системы функций 296, 297
— — — — — функции 240
Линейно независимые решения однородного линейного уравнения n-го порядка 241
— — — однородной линейной системы 297
Линейное уравнение первого порядка 42
— — n-го порядка 8
— — Эйлера 266

Мажоранта 212
Матричное д. у. 322
Матричный метод интегрирования однородных линейных систем 311

---

* Д. у. — дифференциальное уравнение.

— — — — — — с постоянными коэффициентами 325
Матрица, алгебраические операции над матрицами 311
Матрица диагональная 312
—, дифференцирование матрицы 319
— единичная 312
—, интегрирование матрицы 320
—, канонический вид матрицы с постоянными элементами 317
— квазидиагональная 312
— неособенная 312
— нулевая 311
— обратная 314
—, определитель матрицы 312
— особенная 312
—, преобразование подобия 314
—, приведение матрицы с постоянными элементами к каноническому виду 318
—, след матрицы 311
— транспонированная 314
— характеристическая 314
—, характеристические числа матрицы 314
—, характеристический полином 314
—, характеристическое уравнение матрицы 314
—, экспоненциальная функция от матрицы 320
—, элементарные делители матрицы 315
Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) 45, 246, 302
— интегрирующего множителя 59
— исключения 152
— мажорантных рядов (метод Коши) 220
— неопределенных коэффициентов 216, 251
— последовательных приближений Пикара 163
— Эйлера интегрирования линейного уравнения первого порядка 45
— — — однородного линейного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами 248
— — — однородной линейной системы с постоянными коэффициентами 303

Начальное значение интегральной матрицы 322
Начальные условия решения (движения) 11, 12, 98, 133, 145, 341, 345
Независимые интегралы (первые интегралы) нормальной системы д. у. 141, 203
Неоднородная линейная система 292
Неоднородное линейное уравнение n-го порядка 237
— — — — — с постоянными коэффициентами 248
— — — с частными производными первого порядка 343
Неособенное линейное преобразование 205, 295
Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных 184, 187
Неустойчивость решения (движения) 181
Нормальная система д. у. 8
Нормированная интегральная матрица 322
— фундаментальная система решений однородного линейного уравнения n-го порядка 242
— — — — однородной линейной системы д. у. 299
Нули решения однородного линейного уравнения второго порядка. Неколеблющееся решение. Колеблющееся решение 286

Обобщенное однородное уравнение 41, 117
Обобщенный степенной ряд 277
Общее решение 26, 102, 136
— — в параметрической форме 25, 103
— — — форме Коши 27, 103, 137, 200
Общий интеграл 25, 103, 141
Огибающая семейства интегральных кривых уравнения первого порядка как особое решение 29, 74
Однородная функция 39
— линейная система 173
— — — с постоянными коэффициентами 303
Однородное линейное уравнение n-го порядка 181
— — — — — с постоянными коэффициентами 248
— — — с частными производными первого порядка 338
Однородное уравнение первого порядка 38
Операторный метод интегрирования линейных уравнений 259
Определитель Вронского для n функций 240, 241

— — — n систем функций 297
Определяющее уравнение в заданной особой точке 278
Ортогональные траектории 91
Особая точка 203
Особое решение 28, 74, 104, 138

Первые интегралы 105, 141, 148
Поведение интегральных кривых уравнения с однородной дробно-линейной правой частью в окрестности особой точки 205
— траекторий линейной однородной системы двух уравнений с постоянными коэффициентами в окрестности точки равновесия 210
Поле направлений 19, 69, 129
Полином Лежандра 285
— Чебышева 269
Понижение порядка однородного линейного уравнения второго порядка при помощи известного частного решения 272
— — нормальной системы д. у. при помощи известных первых интегралов 142
— — уравнения 105, 106
Постоянная Эйлера 282
Проблема центра и фокуса 211
Промежуточный интеграл 104
Резонанс 259
Решение нормальной системы 9, 128
— уравнения n-го порядка 9, 96
— — первого порядка 9, 17, 68

Самосопряженное д. у. второго порядка 271
Связь между однородным линейным уравнением второго порядка и уравнением Риккати 274
— системы обыкновенных д. у. в симметрической форме с однородным линейным уравнением с частными производными первого порядка 339
Седло 206
Система д. у. в симметрической форме 146
Состояние покоя 130
Стационарная система 128

Теорема Коши 214, 223, 224, 226, 228
— Пеано 23, 100, 134
— Пикара 161, 171, 173, 180, 181
— сравнения 288
— Штурма 288

Точка неопределенности 204
— равновесия (покоя) 205
Траектория движения 129

Узел 206
— вырожденный 209
— дикритический 209
Уравнение Бернулли 49
— Бесселя 279
— в полных дифференциалах 56
— в точных производных n-го порядка 123
— Гаусса 283
— Дарбу 51
— Клеро 88
— Лагранжа 86
Уравнение Лежандра 285
— n-го порядка обыкновенное 7
— — — с частными производными 7
— первого порядка обыкновенное 7
— — — с частными производными 8
—, приводящееся к однородному 40
— Риккати общего вида 53
— — специальное 54
— с разделяющимися переменными 37
— Чебышева 269
— Эйлера (линейное) 266
Условие Липшица 158
Устойчивость решения (движения) 191, 192

Фаза, начальная фаза 257
Фазовое пространство 129
Фокус 208
Формула Остроградского — Лиувилля 241
— Остроградского — Лиувилля — Якоби 298
Фундаментальная система решений 242, 248, 298, 303
Функция Бесселя 281, 282
— Вебера 283

Характеристическое уравнение 206, 249, 304
Характеристические числа 206, 249, 304

Целая функция 212
Центр 208

Частное решение 28, 74, 104, 138

Элементарные делители матрицы 315

Якобиан 351

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3
Введение 7

Глава I. **Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Уравнения, интегрируемые в квадратурах**

§ 1. Основные понятия и определения 17
§ 2. Уравнения, интегрируемые в квадратурах 33
§ 3. Задачи 66

Глава II. **Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения, интегрируемые в квадратурах**

§ 1. Основные понятия и определения 68
§ 2. Уравнения, интегрируемые в квадратурах. . . . 76
§ 3. Задача о траекториях. 90
§ 4. Задачи 94

Глава III. **Дифференциальные уравнения высших порядков**

§ 1. Основные понятия и определения 96
§ 2. Уравнения, интегрируемые в квадратурах, и уравнения, допускающие понижение порядка 106
§ 3. Задачи 125

Глава IV. **Системы обыкновенных дифференциальных уравнений**

§ 1. Нормальные системы дифференциальных уравнений . . . 127
§ 2. Системы дифференциальных уравнений в симметрической форме 146
§ 3. Общие методы интегрирования систем уравнений . . . 152
§ 4. Задачи 155

Глава V. **Теоремы существования**

§ 1. Теорема Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши 158
§ 2. Зависимость решения задачи Коши от начальных данных. Понятие об устойчивости решения (движения) . . . 184
§ 3. Доказательство существования общего решения . . . 200

Стр.

§ 4. Особые точки 203
§ 5. Теорема Коши о существовании и единственности голоморфного решения задачи Коши 211
§ 6. Задачи 232

Глава VI. **Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка**

§ 1. Общие свойства линейных уравнений 237
§ 2. Однородное линейное уравнение n-го порядка . . . 238
§ 3. Неоднородное линейное уравнение 244
§ 4. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами . . 248
§ 5. Уравнения, приводимые к уравнениям с постоянными коэффициентами 265
§ 6. Однородные линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами 270
§ 7. Задачи 289

Глава VII. **Линейные системы дифференциальных уравнений**

§ 1. Общие свойства линейных систем 291
§ 2. Однородная линейная система 295
§ 3. Неоднородная линейная система 301
§ 4. Линейные системы с постоянными коэффициентами . . 303
§ 5. Матричный метод интегрирования однородных линейных систем 311
§ 6. Задачи 336

Глава VIII. **Уравнения с частными производными первого порядка**

§ 1. Однородное линейное уравнение 338
§ 2. Неоднородное линейное уравнение 343
§ 3. Нелинейные уравнения 346
§ 4. Задачи 354
Ответы 355
Примерные темы контрольных работ 358
Предметный указатель 364

Матвеев Николай Михайлович

Дифференциальные уравнения

Редактор *З. И. Царькова*

Художественный редактор *А. Г. Малахов*

Техн. редактор *Л. И. Киселева* Корректоры *А. М. Сурпина, Е. К. Лелякова*

Сдано в набор 19 I 1965 г. М 21838. Подписано к печати 26 III 1965 г.
Уч.-изд. л. 23,78. Печ. л. 23. Бум. л. 11,5. Формат бум. $60\times90^1/_{16}$.
Тираж 13 000 экз. Заказ 74. Цена 81 к. (в переплете).
Тематический план 1965, № 3.

Типография ЛОЛГУ. Ленинград, Университетская наб., 7/9.